TD10

Exercice 1

Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère (e_1^*, e_2^*) sa base duale.

- *Calculer $e_1^*(-4, 5)$ et $e_2^*(2, 0)$.*
- *Soit $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$ et (f_1^*, f_2^*) la base duale associée. Calculer $f_1^*(e_1)$, $f_1^*(e_2)$, $f_2^*(e_1)$, $f_2^*(e_2)$.*
- *Représenter (f_1, f_2) dans la base orthormale (e_1, e_2) et faire de même pour (f_1^*, f_2^*) dans (e_1^*, e_2^*).*
- *Mêmes questions avec $g_1 = 2e_1, g_2 = e_2$.*

Exercice 2

On note $< x, y >$ le produit scalaire de $x, y \in \mathbb{R}^2$ (c.a.d, $< (x_1, x_2), (y_1, y_2) >= x_1 * y_1 + x_2 * y_2$).

- *Si $x \in \mathbb{R}^2$, montrer que l'application $h_x : y \to < x, y >$ est un élément de $(\mathbb{R}^2)^*$.*
- *Soit $x = (1, 1)$. Calculer $h_x(1, 0)$, $h_x(0, 1)$ et $h_x(1, 1)$.*
- *Montrer que si (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ alors (h_{e_1}, h_{e_2}) est une base de $\mathbb{R}^2)^*$.*
- *Représenter la transformée par h des bases de l'exercice 1 dans les bases orthonormales.*

Exercice 3

Représenter le bidual des bases de l'exercice 1 (par exemple $((f_1^*)^*, (f_2^*)^*)$ dans $((e_1^*)^*, (e_2^*)^*)$

Exercice 4

Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finies sur le corps $\Bbbk$. On note que pour L appartenant a E^*, on a $L = 0$ ssi $L(u) = 0$ pour tout u appartenant a E. Par la dualité $E = (E^*)^*$, pour u appartenant a E, $u = 0$ ssi $l(u) = 0$ pour tout L appartenant a E^*

(a) Montrer que $(f^*)^* = f$

(b) Montrer que f et f^* ont même rang.

(c) Montrer que $ker(f^*) = \{y \in E^* \mid y(Im(f)) = 0\}$ et que $ker(f) = \{x \in E \mid Im(f^*)(x) = 0\}$.