TD1: Espaces Vectoriels

Dans toute la feuille $\mathbb{k}$ est un corps (à priori quelconque)

Exercice 1
Si F est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de E (c'est à dire $F \neq \emptyset$ et $\forall u, v \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda u + v \in F$) alors $0 \in E$.

Exercice 2
Dans chacun des exemples suivants, E est-il un sous-$\mathbb{k}$-espace vectoriel ? Justifier.
- $E = \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ *(et donc $\mathbb{k} = \mathbb{R}$)*
- $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$
- $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 6\} \subset \mathbb{R}^3$
- $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$
- $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ *(et donc $\mathbb{k} = \mathbb{C}$)*
- $E = \{f \mid f(x) = ax + b$ *ou* $a, b \in \mathbb{k}^2\}$ *vu comme un sous ensemble des fonctions de $\mathbb{k}$ vers $\mathbb{k}$.*

Exercice 3
Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^2$? Justifier

1) $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

2) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

Donner deux bases de $\mathbb{R}^2$ utilisant les vecteurs précédents

Exercice 4
Les familles suivantes sont-elles génératrices dans $\mathbb{R}^2$? Justifier

1) $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

2) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix} \right)$

Exercice 5
Si F et G sont des sous-$\mathbb{k}$-espaces vectoriels de E, montrer que $F \cap G$ et $F + G$ sont des sous-espaces vectoriels de E. On rappelle que $F + G = \{x + y \mid x \in F, y \in G\}$.

Exercice 6
Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$. Trouver une base de E et la completer en une base de $\mathbb{R}^3$

Exercice 7
Soit $E = \mathbb{R}^3$, déterminer $F + G$ et $F \cap G$ dans les cas suivants :
- $F = \{(a,b,c) \mid a - 2c = 0\}$ *et* $G = \{(x,y,z) \mid (z + y) + (z - y) = x\}$,
- $F = \{(x,y,z) \mid x = 0\}$ *et* $G = \{(x,y,z) \mid x + y + z = 0\}$,
- $F = \{(x,y,z) \mid x + y = 0$ *et* $z = 0\}$ *et* $G = \{(x,y,z) \mid x - y + z = 0\}$.

Exercice 8
Donner des bases des sous-espaces vectoriels F et G de l'exercice précédent.

Exercice 9
Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. *Montrer que $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

Parmi les ensembles suivants, lesquels constituent des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriels $\mathcal{F}$?

1. $\mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(0) = 0\}$,
2. $\mathcal{F}_1 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(1) = 0\}$,
3. $\mathcal{F}_2 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(0) = 1\}$,
4. $\mathcal{F}_3 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 0\}$,
5. $\mathcal{F}_4 = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ est continue}\}$,
6. $\mathcal{F}_5 = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ est dérivable}\}$,
7. $\mathcal{F}_6 = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ est continue et croissante}\}$.

Exercice 10

Soient $P_0,\ P_1,\ P_2$ et P_3 les polynômes définis par

$$P_0(X) = (X-1)(X-2)(X-3), \qquad P_1(X) = X(X-2)(X-3),$$
$$P_2(X) = X(X-1)(X-3), \qquad P_3(X) = X(X-1)(X-2).$$

Montrer que ces polynômes forment une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.
Montrer qu'ils forment une base des polynomes de degré $\leqslant 3$