

TD2 : Applications linéaires

Les exercices estampillés (*) sont censés être un peu plus difficiles.

Exercice 1

Soit $\mathbb{k}$ un corps quelconque (par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $E = \mathbb{k}^2$ et $F = \mathbb{k}^3$.

1. Donner une famille libre de E non génératrice et une famille génératrice non libre de E .
2. Est-ce que l'application déterminant : $\det : E \rightarrow \mathbb{k}$ est une application linéaire ?
3. Soit $f : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, 2x - y) \end{array}$
 - i) Ecrire la matrice de l'application f dans la base canonique.
 - ii) Déterminer le noyau et l'image de f .
4. Mêmes questions avec F à la place de E et $f : \begin{array}{ccc} F & \rightarrow & F \\ (x, y, z) & \mapsto & (3x + 2y, 3y + 2z, -4z + 9x) \end{array}$
5. Ecrire la matrice de cette dernière application dans la base $((0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$ (après avoir vérifié que cette dernière famille est une base de F).

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel E des polynômes de degré inférieur à 2 et l'application $D : E \rightarrow E$ de dérivation.

- i) Ecrire la matrice de l'application D dans la base canonique B .
- ii) Déterminer le noyau et l'image de D .
- iii) Ecrire la matrice de D dans la base $B' = ((X - 1)^n)_{n=0,1,2}$.
- iv) Ecrire la matrice de passage de B à B' .

Exercice 3

Dans chacun des cas ci-dessous, E et F seront deux espaces vectoriels donnés de dimension finie. On se donnera aussi une application $f : E \rightarrow F$. On demande de vérifier que l'application est une application linéaire et d'écrire la matrice de l'application f dans des bases de votre choix.

- $E = F = M_2(\mathbb{k})$. On pose f comme étant l'application de transposition : $A \mapsto A^t$.
- $E = M_2(\mathbb{k})$, $F = M_{2,3}(\mathbb{k})$. On pose $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$. On définit f par $f.B = B.A$ pour $B \in E$.

Exercice 4 (*)

Soit $E = \mathbb{R}^2$. Soit $D \subset E$ la droite d'équation $x - 2y = 0$. On définit $S : E \rightarrow E$ comme étant la symétrie orthogonale par rapport à D .

Ecrire la matrice de S dans la base canonique et dans une base de votre choix (Essayez de vous faire en sorte que la matrice soit plus simple).

Ecrire la matrice de passage d'une base à l'autre. Déterminer le noyau de $S - Id$ et le noyau de $S + Id$.

Donner une interprétation géométrique.

Exercice 5 (*)

Montrer que $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $2n$.

Est-ce que $\sigma : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ définie par $\sigma(z_1, \dots, z_n) = (\overline{z_1}, \dots, \overline{z_n})$ est une $\mathbb{R}$ -application linéaire ? Une $\mathbb{C}$ -application linéaire ? Si oui écrire sa matrice dans une base appropriée.

Exercice 6 (*)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Montrer qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $Im(f) = Ker(f)$ si et seulement si la dimension de E est paire.