

## TD4

**Exercice 1**

Soit  $B$  et  $B'$  deux bases d'un espace vectoriel  $E$  et soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Soit  $A$  (resp.  $A'$ ) la matrice de  $f$  dans la base  $B$  (resp.  $B'$ ). Soit  $P$  la matrice de passage de  $B'$  à  $B$  (c.a.d la matrice dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des éléments de  $B$  dans la base  $B'$ ).

- i) Quelle est la relation entre  $A$ ,  $A'$  et  $P$  ?
- ii) Est-ce que la matrice  $P.A$  est la matrice  $f$  dans certaines bases ?
- iii) Qu'en est-il de  $A.P$  ?

---

Rappels : Si  $f$  est un endomorphisme de  $E$  et si il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $x \in E \setminus \{0\}$  tels que  $f(x) = \lambda x$  alors  $\lambda$  est appelée valeur propre de  $f$  et  $x$  est un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

L'ensemble des vecteurs propres de  $f$  associés à une valeur propre  $\lambda$  est appelé espace propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . On le note  $E_\lambda$ .

Les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme caractéristique de  $f$  :  $P_f(X) = \det(XId - f)$ .

---

**Exercice 2**

- i) Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  défini par  $u(x, y) = (-y, x)$ . Faire un dessin et reconnaître  $u$  (sans démonstration). Est-ce que  $u$  a des vecteurs propres.
- ii) Même question dans le cas où  $u$  est la symétrie orthogonale par rapport à une droite  $D$  passant par 0.

**Exercice 3 (dimension 2...)**

Pour les matrices suivantes, donnez le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les sous-espaces propres associés.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4 (...dimension 3...)**

Même exercice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 5 (\*)**

Soit  $F \subset E$  un sous espace vectoriel,  $W$  une base de  $F$  complétée en une base  $B$  de  $E$ . Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Donner (et démontrer) une condition nécessaire et suffisante sur  $\text{Mat}_B(f)$  pour que  $F$  soit stable par  $f$  (i.e.  $f(F) \subset F$ )

**Exercice 6 (\*)**

Montrer qu'un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  avec  $n$  impair a au moins un vecteur propre (non nul).

Qu'en est-il pour  $\mathbb{C}^n$  ?

**Exercice 7**

Montrer qu'un endomorphisme  $f$  est injectif si et seulement si il n'a pas de valeur propre nulle.

**Exercice 8**

Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les espaces propres d'une matrice diagonale.