

TD5

Exercice 1 (Si vous n'aviez pas fini...)

Pour les matrices suivantes, donnez le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les sous-espaces propres associés.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (idem...)

Même exercice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Diagonaliser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

Montrer qu'un endomorphisme f est injectif si et seulement si il n'a pas de valeur propre nulle.

Exercice 5

Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les espaces propres d'une matrice diagonale.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$. L'application f est-elle un endomorphisme ? A-t-elle des valeurs propres ? Est-elle diagonalisable ?

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Est-ce que A est diagonalisable ? (presque sans calculs)

Mêmes questions avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (un peu plus de calculs).

Exercice 8

Trouver une matrice diagonalisable de taille 5×5 , non diagonale, ayant pour valeurs propres 1, 2, 3, 4, 5.

Exercice 9 (*)

Montrer qu'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ avec n impair a au moins un vecteur propre (non nul).

Qu'en est-il pour $\mathbb{C}^n$?

Exercice 10 (*)

Donner les relations d'inclusion entre les sous espaces propres de A et de A^n