

TD6 : Applications

Exercice 1

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

On distinguera les cas $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ et $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ et on ne fera pas de calculs d'espaces propres.

Exercice 2

Diagonaliser (suivant possibilité) les matrices suivantes sur \mathbb{R} .

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Soient u_n, v_n et w_n trois suites définies par $u_0 = 1, v_0 = -1, w_0 = 3$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n - w_n \\ v_{n+1} = 2v_n - w_n - u_n \\ w_{n+1} = 2w_n - u_n - v_n \end{cases}$$

Trouver une expression générale pour u_n, v_n et w_n .

Exercice 4

Résoudre l'équation différentielle $y''' = 6y - 11y' + 6y''$ en $y(t)$ avec $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

Exercice 5 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Diagonaliser

Généraliser pour toute dimension.

Exercice 6 (*)

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{k})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{k})$. On note $C = I_n - AB$ et $D = I_p - BA$.

- 1) Montrer que si C est inversible alors D est inversible (résoudre $DX = 0$).
- 2) Le cas échéant, exprimer D^{-1} en fonction de A, B, C^{-1} .
- 3) En déduire que AB et BA ont les memes valeurs propres non-nulles. Examiner le cas de la valeur propre 0 si $n = p$.