TD7

Exercice 1
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Calculer* A^4 *et* A^{-1} *grace à Cayley Hamilton.*
Meme question pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2
Donner les polynomes minimaux des matrices suivantes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3
Donner les sous-espaces propres et caractéristiques des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4
Soit A *une matrice réelle. Montrer que si* A *est diagonalisable sur* $\mathbb{R}$ *alors elle est diagonalisable sur* $\mathbb{C}$.

Exercice 5 (*)
Montrer qu'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ *avec* n *impair a au moins un vecteur propre (non nul).*
Qu'en est-il pour $\mathbb{C}^n$ *?*

Exercice 6 (*)
Donner les relations d'inclusion entre les sous espaces propres de A *et de* A^n

Exercice 7 (**)
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{k})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{k})$. *On note* $C = I_n - AB$ *et* $D = I_p - BA$.

1) *Montrer que si* C *est inversible alors* D *est inversible (résoudre* $DX = 0$*).*
2) *Le cas échéant, exprimer* D^{-1} *en fonction de* A, B, C^{-1}.
3) *En déduire que* AB *et* BA *ont les memes valeurs propres non-nulles. Examiner le cas de la valeur propre 0 si* $n = p$.

Exercice 8 (**)
Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{k})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{k})$, $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{k})$. *On pose alors* $n = p + q$ *et* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. *Determiner les relations entre les valeurs propres de* A *et* C *et les valeurs propres de* M. *Faire de même pour les sous-espaces propres.*