

TD8

Exercice 1

Donner les valeurs propres et espaces propres des endomorphismes suivants du plan \mathbb{R}^2 : la projection orthogonale sur une droite D notée p_D ; la symétrie axiale ; la symétrie centrale ; la rotation de centre 0 et d'angle θ (notée R_θ) ; la translation de vecteur \vec{v} ; la composé $p_D \circ R_{\pi/2}$. On distinguera plusieurs cas lorsque cela sera nécessaire.

Exercice 2

Donner les polynôme minimaux de p_D et de $p_D \circ R_{\pi/2}$. Ces endomorphismes sont-ils diagonalisables ?

Exercice 3 (Modélisation)

Un renard est introduit dans un écosystème où il y a n_0 lapins au départ.

Le renard mange 1 lapin par jour.

Chaque mois, un couple de lapin a une portée de 6 petit lapins.

Déterminer ce qui se passe d'un mois à l'autre par une matrice.

Décrire l'évolution du système vers l'infini en fonction de n_0 .

Exercice 4 (Modélisation (bis))

Même question où on remplace le renard par des chasseurs (0 chasseurs le premier mois).

On suppose de plus que l'office des forêts, qui veut exterminer les lapins, délivre 1 permis supplémentaire chaque mois, par groupe de k lapins encore existants.

Déterminer les valeurs de k pour lesquelles l'office des forêts atteint son objectif.

Exercice 5

Diagonaliser ou trigonaliser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 6

Soit A une matrice nilpotente (i.e. il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n=0$).

Montrer que $Id - A$ est inversible. Quels sont ses valeurs propres ?

Montrer que A est trigonalisable.

Exercice 7

Soit f un endomorphisme de \mathbb{k}^3 vérifiant $f^2 = f + Id$. Quels sont les polynômes minimaux possibles pour f .

Même question pour un endomorphisme g de \mathbb{k}^4 vérifiant $g^3 = 2g^2 - g$