Ensembles

Exercice 1

Un promeneur mycophile revient de sa cueillette. Avant d'apporter les champignons chez le pharmacien pour les faire identifier, il les répertorie. Il trouve :

- *12 champignons roses*
- *27 champignons à lamelles*
- *39 champignons à chapeau convexe*

Parmi la cueillette, le promeneur remarque que :

- *Parmi les champignons à chapeau convexe, 12 avaient des lamelles et 7 étaient de couleur rose.*
- *Parmi les champignons à lamelle, 6 -dont 2 avec un chapeau convexe- étaient roses.*

1. *Combien de champignons le promeneur a-t'il ramassé ?*
2. *Combien de champignons à chapeau convexe n'ont ni lamelles ni la couleur rose ?*

Exercice 2

Soient A, B, C *trois parties d'un ensemble* E. *Montrer que* $Card(A \cup B \cup C) = Card(A) + Card(B) + Card(C) - Card(A \cap B) - Card(A \cap C) - Card(B \cap C) + Card(A \cap B \cap C)$

Exercice 3

1. *Donner des exemples d'ensembles à : 0 éléments (1 exemple), 1, 2, et 3 éléments (2 exemples).*
2. *Pour chacun de ces cas, écrire* $\mathcal{P}(E)$ *par une définition en extension (Attention aux accolades).*

Exercice 4

Exprimer la relation entre les deux éléments de chacun des couples suivants, à l'aide des signes d'inclusion et appartenance :

$$(\emptyset, \emptyset)\ ,\ (\emptyset, \{\emptyset\})\ ,\ (\emptyset, \mathbb{R})\ ,\ (1, \mathbb{Z})\ ,\ (\{1\}, 1)\ ,\ (\mathbb{R}, \mathbb{Z})$$

$$(\{1,2\}, P(\mathbb{Z}))\ ,\ (\emptyset, P(E))\ ,\ (\{1,2\}, \mathbb{Z})\ ,\ (\{\emptyset\}, P(E))$$

$$(\{f \mid f\ fonction\ continue\ sur\ \mathbb{R}\}, \{f \mid f\ fonction\ dérivable\ sur\ \mathbb{R}\})$$

$$(\mathbb{R}, \{p \in \mathbb{N} \mid p\ nombre\ premier\})$$

Exercice 5

1. Expliquer ce que sont, pour f fonction 2 fois dérivable et g fonction continue par morceaux, les ensembles suivants :

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid y = \lim_{z \to x} \frac{f(x)-f(z)}{x-z}\}$$

$$\{z \in \mathbb{R} \mid \lim_{x \to z,\, x \leq z} g(x) - g(z) \neq 0 \text{ ou } \lim_{x \to z,\, x \geq z} g(x) - g(z) \neq 0\}$$

2. Ecrire, de la même facon :

   – *l'ensemble des nombres impairs*

   – *l'ensemble des suites convergentes*

   – *l'ensemble des nombres premiers, avec leur définition*

   – *l'ensemble des zéros d'une fonction*

Exercice 6

Faire une démonstration prouvant quels sont, explicitement, les ensembles :

– $[0,1]+[3,4], (= \{a+b \mid a \in [0,1] \text{ et } b \in [3,4]\})$
– $\mathbb{N}+\mathbb{N}$
– $\cos(\mathbb{R})$
– $f^{-1}(\{b_1, b_5, b_6\})$

Exercice 7

Soient E et F deux ensembles (non-vides). On considère : $A \subseteq E$, et $B \subseteq F$.

1. Ecrire $E \times F \ - \ A \times B$ sous la forme d'une union de produits cartésiens.
2. Dans quel cas a-t'on $E \times F \ - \ A \times B = (E - A) \times (F - B)$?

Exercice 8 (Différences)

Soit E un ensemble ; A et B des sous-ensembles de E.
On définit alors :

Différence de A par B :

$$A - B = A \setminus B = A \cap B^C$$

Différence Symétrique de A et B :

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Faire un dessin pour illustrer chacune de ces définitions.
2. Vérifier que :

$$A \triangle B = (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C)$$

Exercice 9
Prouver les relations :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$
$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

Que valent, quand $A \subseteq B$ *:*

$$A \triangle B, A \triangle \emptyset, A \triangle A$$

Montrer que :

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$$

Exercice 10
Soit E *un ensemble. Si* A, B *sont des sous ensembles de de* E, *on définit :*

$$A \star B = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Montrer que $\bar{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$ *s'expriment en utilisant le seul symbole* $\star$.

Exercice 11 (Image d'un ensemble par une application)
Soient E *et* F *des ensembles ;* $A, B \subseteq E$, $C \subseteq F$, *et une application* $f : E \to F$

1. Trouver un contre-exemple montrant que l'on n'a pas toujours :

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

2. Trouver, et prouver la relation entre $f(A \cap f^{-1}(C))$ et $f(A) \cap C$.

Exercice 12
Un ensemble est dit dénombrable si ses éléments peuvent être indexés par les entiers naturels. Vérifier que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *sont dénombrables.*

Exercice 13
Soit E *et* F *des ensembles finis de mêmes cardinaux, et* $f : E \longrightarrow F$.
Montrer que f *injective* $\leftrightarrow$ f *surjective* $\leftrightarrow$ f *bijective .*