TD 11 : Suites

Exercice 1 (Vrai-Faux)
Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Si oui, le prouver, si non, donner un contre-exemple.

1. *Une suite positive qui converge vers* 0 *est décroissaante à partir d'un certain rang.*
2. *Si la suite* $(|x_n|)$ *converge vers* l*, alors* (x_n) *converge vers* l *ou vers* $-l$*.*
3. *Si la suite* (x_n) *converge vers* l*, alors la suite* (x_{n^2}) *converge vers* l*.*
4. *La relation* $(x_n)\,\mathcal{R}\,(y_n) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$ *est une relation d'équivalence.*
5. *Le produit d'une suite qui converge vers* 0 *et d'une suite quelconque converge vers* 0*.*
6. *Toute suite encadrée par deux suites convergentes est convergente.*
7. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$*, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)^n = 1$*.*
8. *De toute suite d'éléments de* $[a, b]$ *on peut extraire une suite convergeant vers un élément de* $[a, b]$*.*

Exercice 2
Etudier la convergence des suites suivantes :

$$\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n},\quad \frac{n\sin(n)}{n^2+1},\quad \frac{1}{n}+(-1)^n,\quad n\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n^2+k},\quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\Big(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\Big).$$

Exercice 3
Soit $u_0 \in [0, 1]$*. On définit une suite* (u_n) *par récurrence par la formule*

$$u_{n+1} = u_n(1-u_n) \quad \forall\, n \geq 0.$$

1. *Montrer que* (u_n) *est décroissante.*
2. *Montrer que* $u_n \geq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*
3. *En déduire que* (u_n) *converge et que sa limite est* 0*.*

Exercice 4
Soit $a > 0$ *et* $b > 0$*. On définit deux suites* (x_n) *et* (y_n) *par récurrence par la formule*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \\ y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \end{cases}$$

pour tout $n \geq 0$*.*

1. *Montrer que pour tout* $n \geq 1$*,* $x_n \geq y_n$*.*
2. *En déduire qu'à partir du rang 1,* (x_n) *est décroissante et* (y_n) *est croissante.*

3. *En déduire que* (x_n) *et* (y_n) *convergent.*
4. *Montrer qu'elles ont la même limite.*

Exercice 5
Soit (u_n) *une suite réelle. On suppose que les suites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *convergent vers la même limite* l*. Montrer que* (u_n) *converge vers* l*.*

Exercice 6
Soit

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

1. *Montrer que les suites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *sont adjacentes.*
2. *En déduire que* (u_n) *converge.*

Exercice 7
Montrer qu'une suite convergente de nombres entiers relatifs est stationnaire.

Exercice 8 (Théorème de Césaro)
Soit (u_n) *une suite convergeant vers* l*. Montrer que la suite* $\left(\frac{u_1+\cdots+u_n}{n}\right)$ *converge vers* l*.*