TD1 : Logique et Ensembles

Exercice 1

1. *Prouver les relations logiques*

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

2. *Prouver les relations ensemblistes*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Exercice 2

Donner la négation des assertions suivantes :

$$P \wedge \neg Q, \quad P \vee (Q \wedge R), \quad P \Rightarrow Q, \quad P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), \quad P \Leftrightarrow Q$$

Exercice 3

Soient A et B deux assertions. Montrer que les assertions $(A \Rightarrow B)$ et $(\neg B \Rightarrow \neg A)$ sont équivalentes

Exercice 4

Soient A, B et C trois assertions. Montrer que les assertions suivantes sont des tautologies.

- $A \wedge \neg A \Rightarrow B$
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \Leftrightarrow \neg B)$
- $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Leftrightarrow (B \Rightarrow C))$
- $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow ((A \vee C) \Leftrightarrow (B \vee C))$
- $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow ((A \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C))$

Exercice 5

1. *Dans le plan complexe, considérer le rectangle plein délimité par les droites d'équation $x = 1$, $x = 6$, $y = 2$, $y = 5$ comme un produit cartésien et représenter cet ensemble.*
2. *Soient les intervalles $E = [1; 6], F = [2; 5], A = [2; 3] \subset E$ et $B = [3; 4] \subset F$. On sonsidère $E \times F$ et on pose $\bar{A} = E \setminus A$ et $\bar{B} = F \setminus B$. Représenter sur le graphique précédent, les ensembles $A \times B$, $\bar{A} \times B$, $A \times \bar{B}$, $\bar{A} \times \bar{B}$. Vérifier qu'ils forment une partition de $E \times F$*
3. *Ecrire $(E \times F) \setminus (A \times B)$ sous la forme d'une union de produits cartésiens*

Exercice 6 (Différences symétriques)
Soit E un ensemble ; A et B des sous-ensembles de E. On rappelle que $A \setminus B = A \cap B^c$ *et on définit la différence symétrique de A et B par*

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Faire un dessin pour illustrer cette définition.
2. *Soient* A, B, C, D *des sous-ensembles de* E. *Prouver que*
   i) $A^c \triangle B^c = A \triangle B$
   ii) $A \triangle B = \emptyset$ *ssi A=B*
   iii) Si $A \triangle B = A \triangle C$ *alors* $B = C$
   iv) Si $A \triangle B = A \cap B$ *alors* $A = B = \emptyset$.

Exercice 7
Montrer que $\forall x \in \mathbb{N}; \exists y \in \mathbb{N}$ *tel que* $y > x$. *En revanche, montrer que l'assertion* $\exists y \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{N}; y > x$ *est fausse.*

Exercice 8
Soit f *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *On appelle Epi(f) l'ensemble* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant f(x)\}$ *Montrer que* $f \leqslant g \Rightarrow Epi(f) \subset Epi(g)$.