

## TD3 : Relations/Réurrence/Groupes

### Exercice 1

On définit les deux relations suivantes sur l'ensemble des personnes :

- a) Une personne  $x$  est en relation avec une autre personne  $y$  si  $x$  et  $y$  passent au moins dix heures par semaine ensemble.
- b)  $x$  et  $y$  sont en relation si  $x$  et  $y$  passent tout leur temps ensemble.

Ces relations sont-elles des relations d'équivalence ?

### Exercice 2

Soit  $E = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ , on définit la relation  $\mathcal{R}$  sur  $E$  par

$$x \mathcal{R} y \text{ si } x^2 = y^2$$

- a) Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
- b) Déterminer la classe d'équivalence de 0.
- c) Combien y a-t-il de classes d'équivalences dans  $E$  pour la relation  $\mathcal{R}$  ?

### Exercice 3

Soit  $\mathcal{R}$  la relation définie sur  $\mathbb{C}^*$  par

$$z \mathcal{R} z' \text{ si } \frac{z}{z'} \in \mathbb{R}^{+*}.$$

Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence et caractériser les classes d'équivalence.

### Exercice 4

On définit les deux relations sur  $\mathbb{R}^2$ ,  $\preceq$  et  $\dashv$  par

$$(x, y) \preceq (x', y') \text{ si } x \leq x' \text{ ou } y \leq y',$$

$$(x, y) \dashv (x', y') \text{ si } x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$$

Ces relations sont-elles des relations d'ordre ?

### Exercice 5

On munit  $\mathbb{N}^*$  de la relation  $\preceq$  définie par

$$p \preceq q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, p^n = q.$$

- a) Montrer que  $\preceq$  est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?
- b) La partie  $\{2, 3\}$  est-elle majorée ?

**Exercice 6**

Montrer par récurrence que

$$\sum_{k=0}^n (3k+1) = \frac{1}{2}(3n^2 + 5n + 2)$$

quelque soit  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 7**

Montrer par récurrence que l'entier  $2^{3^n} - 2$  est divisible par 3 quelque soit  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 8**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On définit  $\mathfrak{S}_n$  comme l'ensemble des bijections de  $\{1, \dots, n\}$  dans  $\{1, \dots, n\}$ . On définit la loi  $\circ$  sur  $\mathfrak{S}_n$  par  $\sigma \circ \tau(x) = \sigma(\tau(x))$ . C'est la composée des deux bijections. Pour visualiser un élément  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  on le notera

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

a) Calculer  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

b) Montrer que  $(\mathfrak{S}_n, \circ)$  est un groupe.

c) Montrer que  $\circ$  n'est pas commutative (on pourra se restreindre au cas  $n = 3$ ).

d) Soit  $f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ . Comparer  $(f \circ g)^{-1}$  et  $f^{-1} \circ g^{-1}$ .

**Exercice 9**

a) Soit  $E = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid \exists a \in \mathbb{C}^*, \exists b \in \mathbb{C} \mid \forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b\}$  muni de la composition. Montrer que c'est un groupe. Ce groupe est-il commutatif?

b) Qu'en est-il pour  $E = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid \exists a \in \mathbb{C}^*, \exists b \in \mathbb{C} \mid \forall z \in \mathbb{C}, f(z) = a\bar{z} + b\}$  muni de la composition?