

TD4 :Groupe/Anneaux/ \mathbb{C} **Exercice 1**

Soit \mathbb{U}_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité dans \mathbb{C} . Montrer que \mathbb{U}_n , muni de la multiplication des nombres complexes, est un groupe.

Exercice 2

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer les sommes suivantes

1. $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$,
2. $\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n$.

Exercice 3

1. Déterminer une racine carrée des nombres complexes i et $-5 + 12i$.
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation complexe

$$2iz^2 - (6 + 6i)z + 5 = 0.$$

Exercice 4

1. Ecrire les tables d'addition et de multiplication de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
2. Donner les éléments inversibles.
3. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est-il un corps ? un anneau intègre ?

Exercice 5

Soit A l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On munit A de l'addition et du produit usuels.

1. Montrer que A est un anneau. Est-il intègre ?
2. Donner les éléments inversibles de A .

Exercice 6

Déterminer les racines dans \mathbb{C} du polynôme $P(X) = X^6 + X^4 + X^2 + 1$.

Exercice 7

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1) = n^3.$$