TD 6 : Arithmétique

Exercice 1
Décomposer les nombres suivants en facteurs premiers :
29, 43, 36, 98, 81, 132, 194, 297, 1000, 7!.

Exercice 2
Donner le nombre de diviseurs de 10!.

Exercice 3
Pour les couples suivants, calculer le pgcd, le ppcm et écrire une relation de Bézout:

$$(48, 36) \qquad (12, 5) \qquad (10, 15) \qquad (42, 98) \qquad (20, 27) \qquad (8, 13).$$

Exercice 4
Soit n un nombre entier. Montrer que $\sqrt{n}$ est rationnel si et seulement si n est un carré parfait (il existe un nombre entier m tel que $n = m^2$).

Exercice 5
Soient a, b, c trois nombres entiers relatifs.

1. *Montrer que l'équation $ax + by = c$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}$ si et seulement si pgcd(a, b) divise c.*
2. *Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :*
   a) $162x + 207y = 27$,
   b) $192x + 247y = 15$,
   c) $198x + 216y = 36$,
   d) $323x - 391y = 612$.

Exercice 6
Pour les couples suivants, calculer le pgcd, le ppcm et écrire une relation de Bézout (p est un nombre premier, et $n \in \mathbb{N}$).

$$(3n + 1, 2n + 1) \qquad (2, p) \qquad (6(n + 1), 2n + 1) \qquad (3, p).$$

Exercice 7
Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Supposons de plus que ab soit un carré parfait.

1. *Montrer que a et b sont des carrés parfaits.*

2. *Montrer que l'hypothèse $a \wedge b = 1$ est necessaire.*

Exercice 8
Trouver 2007 nombres entiers consécutifs non premiers.

Exercice 9
Résoudre le système suivant pour $(x, y) \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} ppcm(x, y) = 30\, pgcd(x, y) \\ y - x = 7 \end{cases}$$

Exercice 10
Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$. Montrer que si le nombre $a^r - 1$ est premier, alors $a = 2$ et r est premier.

Exercice 11
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si le nombre $2^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de 2.