

TD7 Arithmétique

Exercice 1

1. Déterminer $d = \text{pgcd}(30, 105, 154)$.
2. Trouver un triplet d'entiers relatifs (u, v, w) tel que $30u + 105v + 154w = d$.

Exercice 2

1. Déterminer $d = \text{pgcd}(378, 315, 210)$.
2. Trouver un triplet d'entiers relatifs (a, b, c) tel que $378a + 315b + 210c = d$.

Exercice 3

Effectuer la division euclidienne de

- a) X^7 par $X^2 + 1$,
- b) X^7 par $X^2 + 2X + 3$,
- c) $180X$ par $3X^2$,
- d) $4X^4 + 2X^3 + 3$ par $3X + 1$.

Exercice 4

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, a et b deux réels distincts. Trouver le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)$, $(X - a)(X - b)$ et par $(X - a)^2$.

Exercice 5

Soit $P(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$.

1. Trouvez quatre nombres complexes w_1, w_2, w_3 et w_4 tels que $P(X) = (X - w_1)(X - w_2)(X - w_3)(X - w_4)$.
2. En déduire l'existence de deux polynômes Q_1, Q_2 de $\mathbb{R}[X]$ sans racines réelles tels que $P = Q_1 Q_2$.
3. En déduire les valeurs de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\cos(\frac{4\pi}{5})$.

Exercice 6

Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$. Soit q (resp. r) le quotient (resp. le reste) de la division euclidienne de n par k (c'est-à-dire que $n = qk + r$ avec $0 \leq r < k$). Montrer que le reste de la division euclidienne de

1. X^n par $X^k - a$ est $a^q X^r$,
2. $X^n - a^n$ par $X^k - a^k$ est $a^{kq}(X^r - a^r)$.