TD8 Arithmétique

Exercice 1
Déterminer le pgcd et écrire une relation de Bézout pour les couples suivants :

a) $X^5 + 2X^3 + X^2 + 2X$ *et* $X^3 + X + 1$,

b) $2X^5 + 4X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 4X - 2$ *et* $X^3 - X^2 + X - 1$,

c) $X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$ *et* $X^3 - X^2 - X - 2$.

Exercice 2
Soit $P(X) = X^4 - 5X^3 + 13X^2 - 19X + 10 \in \mathbb{R}[X]$. *Calculer* $P(1)$ *et* $P(2)$. *En déduire une factorisation de* $P(X)$ *dans* $R[X]$.

Exercice 3
Soit $P(X) = X^4 + X^3 - X^2 + 6 \in \mathbb{R}[X]$. *Calculer* $P(1+i)$. *En déduire une factorisation de* P *dans* $C[X]$ *et dans* $R[X]$.

Exercice 4
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ *un polynome de degré* n.

1. *Montrer que* $a \in \mathbb{R}$ *est une racine double de* P *si et seulement si* $P(a) = P'(a) = 0$.

2. *Montrer que pour tout* $a \in \mathbb{R}$,

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

3. *En déduire que* a *est racine de* P *de multiplicité* $m \geq 1$ *si et seulement si*

$$\forall i \in [\![1, m-1]\!],\ P^{(i)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(a) \neq 0.$$

Exercice 5
Existe-t-il un polynome $P \in \mathbb{R}[X]$ *de degré 7 tel que* $(X-1)^4$ *divise* $P+1$ *et* $(X+1)^4$ *divise* $P-1$ *?*