TD1 : Logique et Ensembles

Exercice 1

1. *Prouver les relations logiques*

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C,$$

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

2. *Prouver les relations ensemblistes*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Exercice 2
Donner la négation des assertions suivantes :

$$P \wedge \neg Q, \quad P \vee (Q \wedge R), \quad P \Rightarrow Q, \quad P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), \quad P \Leftrightarrow Q.$$

Exercice 3
Soient A et B deux assertions. Montrer que les assertions $(A \Rightarrow B)$ et $(\neg B \Rightarrow \neg A)$ sont équivalentes.

Exercice 4
Soient A, B et C trois assertions. Montrer que les assertions suivantes sont des tautologies.
- $(A \wedge \neg A) \Rightarrow B$,
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \Leftrightarrow \neg B)$,
- $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Leftrightarrow (B \Rightarrow C))$,
- $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow ((A \vee C) \Leftrightarrow (B \vee C))$,
- $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow ((A \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C))$.

Exercice 5 (Différences symétriques)
Soit E un ensemble ; A et B des sous-ensembles de E. On rappelle que $A \setminus B = A \cap B^c$ et on définit la différence symétrique de A et B par

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Faire un dessin pour illustrer cette définition.
2. *Soient A, B, C, D des sous-ensembles de E. Prouver que*
   i) $A^c \triangle B^c = A \triangle B$.
   ii) $A \triangle B = \emptyset$ *si et seulement si A=B.*

iii) Si $A \triangle B = A \triangle C$, *alors* $B = C$.
iv) Si $A \triangle B = A \cap B$, *alors* $A = B = \emptyset$.

Exercice 6
Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{N}, \exists\, y \in \mathbb{N}$ *tel que* $y > x$. *En revanche, montrer que l'assertion*

$$\exists\, y \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, x \in \mathbb{N};\ y > x$$

est fausse.

Exercice 7
Soit f *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *On appelle Epi(f) l'ensemble*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant f(x)\}.$$

Montrer que $f \leqslant g \Rightarrow Epi(g) \subset Epi(f)$.