TD2 : Ensembles/ Applications

Exercice 1
Soit $A = \{0,1,2,3\}$ et $B = \{0,4,1,7\}$. On définit des applications f et g de A dans B par :

$$f(0) = 0;\ f(1) = 7;\ f(3) = 1;\ f(2) = 4$$

$$g(0) = 1;\ g(3) = 7;\ g(1) = 1;\ g(2) = 0$$

1. *Que peut-on dire de l'application f ?*
2. *Que peut-on dire de l'application g ?*

Exercice 2
Dans chacun des cas suivants, l'application f est-elle injective, bijective, surjective ?

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{Q}^* &\to \mathbb{Q}^* \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 3
Un promeneur mycophile revient de sa cueillette. Avant d'apporter les champignons chez le pharmacien pour les faire identifier, il les répertorie. Il trouve :
- *12 champignons roses*
- *27 champignons à lamelles*
- *39 champignons à chapeau convexe*

Parmi la cueillette, le promeneur remarque que :
- *Parmi les champignons à chapeau convexe, 12 avaient des lamelles et 7 étaient de couleur rose.*
- *Parmi les champignons à lamelle, 6 -dont 2 avec un chapeau convexe- étaient roses.*

1. *Combien de champignons le promeneur a-t'il ramassé ?*
2. *Combien de champignons à chapeau convexe n'ont ni lamelles ni la couleur rose ?*

Exercice 4
Soit $E = \{1,2,3\}$ écrire les éléments de $\mathcal{P}(E)$. Attention aux accolades !

Exercice 5
Exprimer la relation entre les deux éléments de chacun des couples suivants, à l'aide des signes d'inclusion et appartenance :

$$(\emptyset, \mathbb{R})\ ,\ (1, \mathbb{Z})\ ,\ (\{1\}, 1)\ ,\ (\mathbb{R}, \mathbb{Z}),\ (\{1,2\}, P(\mathbb{Z}))$$

$$(\{1,2\},\mathbb{Z}),\ (\{\emptyset\},P(E)),\ (\emptyset,\emptyset)\ ,\ (\emptyset,\{\emptyset\}),\ (\emptyset,P(E))$$
$$(\{f \mid f\ fonction\ continue\ sur\ \mathbb{R}\},\{f \mid f\ fonction\ dérivable\ sur\ \mathbb{R}\})$$
$$(\mathbb{R},\{p\in\mathbb{N} \mid p\ nombre\ premier\})$$

Exercice 6
On considére la fonction partie entière E, la fonction identité id, et la fonction carré $f(x) = x^2$, définies sur $\mathbb{R}$.
Déterminer pour chacune de ces fonctions :

1. les images de :
$$\mathbb{R}\ ,\ A = [0,3]\ ,\ B =]3,4[\ ,\ ]-2,1[$$
2. les images réciproques de :
$$\mathbb{R}\ ,\ \{\frac{1}{2}\}\ ,\ \{5\}\ ,\ ]2,9]$$
3. Déterminer :
$$E(A\cap B)\ et\ E(A)\cap E(B)$$

Exercice 7
Soient E et F des ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : E \to F$ deux applications.
Soient X et X' des parties de E. Soient Y,Y' des parties de F. Comparer les ensembles suivants :

1. $f(X\cup X')$ et $f(X)\cup f(X')$
2. $f(X\cap X')$ et $f(X)\cap f(X')$
3. $f^{-1}(Y\cap Y')$ et $f^{-1}(Y)\cap f^{-1}(Y')$
4. $f^{-1}(Y\cup Y')$ et $f^{-1}(Y)\cup f^{-1}(Y')$
5. X et $f^{-1}(f(X))$
6. Y et $f(f^{-1}(Y))$

Exercice 8
Soit $f : E \to F$ une application.
Montrer que f est injective si et seulement si $X = f^{-1}(f(X))$ pour tout $X \subseteq E$
Montrer que f est surjective si et seulement si $Y = f(f^{-1}(Y))$ pour tout $Y \subseteq F$

Exercice 9
Soient E, F et G trois ensembles. Soient deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Montrer que : $g\circ f$ *surjective* $\Rightarrow g$ *surjective.*
2. Montrer que : $g\circ f$ *injective* $\Rightarrow f$ *injective.*

Exercice 10
Soit E un ensemble et f une application injective de E dans E, c'est à dire une application vérifiant :

$$\forall x_1,x_2\in E,\ f(x_1)=f(x_2) \Longleftrightarrow x_1=x_2.$$

On définit par récurrence sur $n\geq 1$ des applications f^n par

$$f^1 = f \qquad\qquad f^n = f\circ f^{n-1}$$

où $f\circ g$ désigne la fonction composé de g par f définie par

$$f\circ g(x) = f\big(g(x)\big)$$

pour tout $x\in E$ et toute application $g : E \longrightarrow E$.

1. Montrer que pour tout $n\geq 1$ l'application f^n est injective.
2. Montrer que si f surjective, pour tout $n\geq 1$, l'application f^n est surjective.