TD3 : Image réciproque, composée, géométrie

Exercice 1 (Pour ceux qui ne l'ont pas encore fait)
On considére la fonction partie entière E, la fonction identité id, et la fonction carré $f(x) = x^2$*, définies sur* $\mathbb{R}$.
Déterminer pour chacune de ces fonctions :

1. les images de :
$$\mathbb{R}\ ,\ A = [0,3]\ ,\ B =]3,4[\ ,\ ]-2,1[$$
2. les images réciproques de :
$$\mathbb{R}\ ,\ \{\frac{1}{2}\}\ ,\ \{5\}\ ,\ ]2,9]$$
3. Déterminer :
$$E(A \cap B) \text{ et } E(A) \cap E(B)$$

Exercice 2
Soit $E = \{0,1,2,3\}$, $F = \{0,4,1,7\}$ *et* $G = \{2,4,-1,1\}$. *On définit des applications* $f : E \to F$ *et* $g : F \to G$ *par*
$$f(0) = 0;\ f(1) = 7;\ f(3) = 1;\ f(2) = 0$$
$$g(0) = 2;\ g(7) = -1;\ g(1) = 2;\ g(4) = 1.$$

1. *Calculer* $g \circ f(x)$ *pour tout* $x \in E$
2. *Calculer* $(g \circ f)^{-1}(\{2,1\})$

Exercice 3
Soit A *un point de* $\mathbb{R}^2$ *et* θ *un angle. On définit la rotation plane* $r_{A,\theta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *comme étant la rotation de centre* A *et d'angle* θ.
Plus précisément $r_{A,\theta}(B)$ *est le point* C *situé sur* $\mathcal{C}_{A,AB}$ *le cercle de centre* A *et de rayon* AB, *tel que* $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \theta$.

1. *Montrer que* $r_{A,\theta}$ *est une bijection en explicitant* $(r_{A,\theta})^{-1}$.
2. *Determiner* $r_{A,\theta}(\mathcal{C}_{A,t})$ *(où* $t \in \mathbb{R}$*)*
3. *Determiner* $r_{A,\theta} \circ r_{A,\beta} \circ r_{A,-\gamma}$.
4. *Montrer que* $r_{O,\pi} \circ r_{(0,1),\pi} \neq r_{(0,1),\pi} \circ r_{O,\pi}$.

Exercice 4
D *étant une droite de* $\mathbb{R}^2$, *on définit* $s_D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *comme étant la symétrie d'axe* D. *Plus précisément, si* $D_A^\perp$ *est la perpendiculaire à* D *passant par* A, $s_D(A)$ *est le point* C *situé sur* $D_A^\perp$ *tel que* $\vec{AC} = 2\vec{AK}$ *où* K *est le point d'intersection de* D *avec* $D_A^\perp$.

1. *Montrer que* s_D *est une bijection.*
2. *On suppose que* D *passe par* $O = (0,0)$. *Determiner* $(s_D)^{-1}(D_O^\perp)$
3. *Determiner* $s_D \circ s_{D_O^\perp} \circ r_{O,\pi}$ *et conclure.*

Exercice 5
Soient E et F des ensembles. Soit $f : E \to F$ *une application.*
Soient X et X' des parties de E. Soient Y,Y' des parties de F. Comparer les ensembles suivants :

1. $f(X \cup X')$ *et* $f(X) \cup f(X')$
2. $f(X \cap X')$ *et* $f(X) \cap f(X')$
3. $f^{-1}(Y \cap Y')$ *et* $f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y')$
4. $f^{-1}(Y \cup Y')$ *et* $f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y')$
5. X *et* $f^{-1}(f(X))$
6. Y *et* $f(f^{-1}(Y))$

Exercice 6
Montrer que la projection sur une droite D par rapport à une droite D' est une surjection. Déterminer l'image réciproque d'un point A

Exercice 7
Soit $f : E \to F$ une application.
Montrer que f est injective si et seulement si $X = f^{-1}(f(X))$ pour tout $X \subseteq E$
Montrer que f est surjective si et seulement si $Y = f(f^{-1}(Y))$ pour tout $Y \subseteq F$

Exercice 8
Soient E, F et G trois ensembles. Soient deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Montrer que : $g \circ f$ *surjective* $\Rightarrow g$ *surjective.*
2. Montrer que : $g \circ f$ *injective* $\Rightarrow f$ *injective.*

Exercice 9
Soit E un ensemble et f une application injective de E dans E, c'est à dire une application vérifiant :

$$\forall x_1, x_2 \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2.$$

On définit par récurrence sur $n \geq 1$ des applications f^n par

$$f^1 = f \qquad\qquad f^n = f \circ f^{n-1}$$

où $f \circ g$ désigne la fonction composé de g par f définie par

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$$

pour tout $x \in E$ et toute application $g : E \longrightarrow E$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$ l'application f^n est injective.
2. Montrer que si f surjective, pour tout $n \geq 1$, l'application f^n est surjective.

Exercice 10
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $\mathfrak{S}_n$ comme l'ensemble des bijections de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$. On définit la loi $\circ$ sur $\mathfrak{S}_n$ par $\sigma \circ \tau(x) = \sigma(\tau(x))$. C'est la composée des deux bijections. Pour visualiser un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on le notera

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

a) *Calculer* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

b) *Montrer que $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe.*

c) *Montrer que $\circ$ n'est pas commutative (on pourra se restreindre au cas $n = 3$).*

d) *Soit* $f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. *Comparer* $(f \circ g)^{-1}$ *et* $f^{-1} \circ g^{-1}$.