TD4 :Relations/Groupes

Exercice 1
On définit les deux relations suivantes sur l'ensemble des personnes :

a) *Une personne x est en relation avec une autre personne y si x et y passent au moins dix heures par semaine ensemble.*

b) *x et y sont en relation si x et y passent tout leur temps ensemble.*

Ces relations sont-elles des relations d'équivalence ?

Exercice 2
Soit $E = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ sur E par

$$x \,\mathcal{R}\, y \text{ si } x^2 = y^2$$

a) *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

b) *Determiner la classe d'équivalence de 0.*

c) *Combien y a-t'il de classes d'équivalences dans E pour la relation $\mathcal{R}$?*

Exercice 3
Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{C}^*$ par

$$z \,\mathcal{R}\, z' \quad si \quad \frac{z}{z'} \in \mathbb{R}^{+*}.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et caractériser les classes d'équivalence.

Exercice 4
On définit les deux relations sur $\mathbb{R}^2$, $\preceq$ et $\dashv$ par

$$(x, y) \preceq (x', y') \text{ si } x \leqslant x' \text{ ou } y \leqslant y',$$

$$(x, y) \dashv (x', y') \text{ si } x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y'.$$

Ces relations sont-elles des relations d'ordre ?

Exercice 5
On munit $\mathbb{N}^*$ de la relation $\preceq$ définie par

$$p \preceq q \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\, p^n = q.$$

a) *Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?*

b) *La partie $\{2, 3\}$ est-elle majorée ?*

Exercice 6
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $\mathfrak{S}_n$ comme l'ensemble des bijections de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$. On définit la loi $\circ$ sur $\mathfrak{S}_n$ par $\sigma \circ \tau(x) = \sigma(\tau(x))$. C'est la composée des deux bijections. Pour visualiser un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on le notera

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

a) *Calculer* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

b) *Montrer que $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe.*

c) *Montrer que $\circ$ n'est pas commutative (on pourra se restreindre au cas $n = 3$).*

d) *Soit* $f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. *Comparer* $(f \circ g)^{-1}$ *et* $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice 7

a) *Soit $E = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid \exists\, a \in \mathbb{C}^*, \exists\, b \in \mathbb{C} \mid \forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = az + b\}$ muni de la composition. Montrer que c'est un groupe. Ce groupe est-il commutatif ?*

b) *Qu'en est-il pour $E = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid \exists\, a \in \mathbb{C}^*, \exists\, b \in \mathbb{C} \mid \forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = a\overline{z} + b\}$ muni de la composition ?*

Exercice 8
Soit $(G, .)$ un groupe,
i) Montrer que si e et e' sont des éléments neutres alors $e = e'$.
ii) Soit $g \in G$, $\Phi_g : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ h & \mapsto & g.h \end{array} \right.$, $\Psi_g : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ h & \mapsto & g.h.g^{-1} \end{array} \right.$ *Montrer que Φ et Ψ sont des bijections.*
iii) Soit $\mathcal{R}$ la relation

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists g,\ \Psi_g(x) = y.$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence.