TD5 : Relations/Groupe/Anneaux...

Exercice 1
Soit A, B deux points du plan $\mathbb{R}^2$. Dire (sans démonstration) si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence (ou d'ordre) et si oui déterminer les classes d'équivalences.

a) $x\mathcal{R}y$ si x et y sont équidistant de A,
b) $x\mathcal{R}y$ si $\vec{Ax} = \vec{yA}$,
c) $x\mathcal{R}y$ si $\vec{xy}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaire.
d) $x\mathcal{R}y$ si $\mid xy \mid = \mid AB \mid$.

Exercice 2
Justifier rapidement si $\mathcal{R}$ est (ou non) une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. Le cas échéant, déterminer les classes d'équivalences.

- $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y$ est un multiple de 3.
- $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy$ est un multiple de 3.
- $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y$ est un multiple de 3.
- $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y$ est un multiple de 2.

Exercice 3
Soit $(G, \circ)$ un groupe, e son élément neutre et F un ensemble.
On dit que G agit sur F via $\cdot$ si $\cdot$ et une application de $G \times F$ vers F telle que $(g \circ g') \cdot f = g \cdot (g' \cdot f)$ et $e \cdot f = f$ pour tous $g, g' \in G$ et $f \in F$.
On définit la relation $\mathcal{R}$ sur F par

$$x\mathcal{R}y \text{ si et seulement si } \exists g \in G,\ g \cdot x = y.$$

Quelles propriétés vérifie $\mathcal{R}$?

Exercice 4

1. Ecrire les tables d'addition et de multiplication de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
2. Donner les éléments inversibles.
3. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est-il un corps ? un anneau intègre ?

Exercice 5
Soit A l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit A de l'addition et du produit usuels ($(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$).

1. Montrer que A est un anneau. Est-il intègre ?
2. Donner les éléments inversibles de A.

Exercice 6
Soit $A = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, muni du produit et de la multiplication complexe. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ et donner ses éléments inversibles.

Exercice 7

a) Soit $E = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid \exists a \in \mathbb{C}^*, \exists b \in \mathbb{C} \mid \forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = az + b\}$ *muni de la composition. Montrer que c'est un groupe. Ce groupe est-il commutatif ?*

b) Qu'en est-il pour $E = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid \exists a \in \mathbb{C}^*, \exists b \in \mathbb{C} \mid \forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = a\overline{z} + b\}$ *muni de la composition ?*

Exercice 8

Soit $(G, .)$ *un groupe,*

i) Montrer que si e *et* e' *sont des éléments neutres alors* $e = e'$.

ii) Soit $g \in G$, $\Phi_g : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ h & \mapsto & g.h \end{array} \right.$, $\Psi_g : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ h & \mapsto & g.h.g^{-1} \end{array} \right.$ *Montrer que* Φ *et* Ψ *sont des bijections.*

iii) Soit $\mathcal{R}$ *la relation*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists g,\ \Psi_g(x) = y.$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence.

iv) Soit H *un sous-groupe de* G *tel que* $g.H.g^{-1} = H$ *pour tout* $g \in G$. *Soit* $\mathcal{R}$ *la relation sur* G

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists h \in H,\ \Phi_h(x) = y.$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence. et que $G/\mathcal{R}$ *a une structure de groupe.*