Université de Brest 2008 - 2009

L1-Algèbre -géométrie

TD 10-11-12

Exercice 1

Démontrer que le nombre $3^{8n}\, 5^4 + 5^{6n}\, 7^3$ est divisible par 11 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Calculer x_n, $0 \leq x_n < 7$, tel que $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1 \equiv x_n$ (modulo 7). n étant un entier arbitraire.

Exercice 3

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 4^n + 15n - 1 \equiv 0$ modulo 9.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^{4n+2}$ est $\equiv 4$ modulo 5 .

3) $n \in \mathbb{N}$, on pose $f(n) = 3^{2n} + 3^n + 1$.
Montrer que $f(n+3) - f(n) \equiv 0$ modulo 13.

Donner toutes les valeurs de n satisfaisant $f(n) \in 13\mathbb{Z}$.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$,

a) $\overline{5}\overline{x} = \overline{5}$.

b) $\overline{6}\overline{x} = \overline{6}$.

c) Calculer $\overline{10^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

En appliquant l'algorithme d'Euclide, calculer le pgcd de :

a) 2431 et 1342

b) 13579 et 2468

Exercice 6

a et b deux éléments de $\mathbb{Z}$. On pose $A = 11a + 2b$ et $B = 18a + 5b$.

a) Démontrer que $19 \mid A \Leftrightarrow 19 \mid B$

b) On suppose que a et b sont premiers entre eux.

Montrer que A et B sont premiers entre eux ou le pgcd de A et B est 19.

Exercice 7

a et b deux éléments de $\mathbb{Z}$. Montrer que le pgcd de $13a - 11b$ et $5a - 16b$ est 1 ou 7.

Exercice 8

1) Soit $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'application définie par $f(x) = 2^m \times 3^n$. Montrer que f est injective.

2) Soit $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ l'application définie par $g(x) = 2^m(2n + 1)$. Montrer que f est bijective.

Exercice 9

Soient n et m deux entiers relatifs tels que $n^2 - m^2$ est premier.

Montrer que n et m sont consécutifs.

Exercice 10

1) Construire la table de multiplication de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. En déduire que $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps.

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : $7x + 5y = 11$.

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

1) $-55x + 50y = 95$.

2) $120x + 760y = 280$.

3) $102x - 323y = 323$.

Exercice 12

Montrer que $a \in \mathbb{K}$ est une racine double d'un polynôme P si et seulement si $P(a) = P'(a) = 0$. Généraliser ce résultat pour les racines n-ièmes

Exercice 13

Montrer que le polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$ admet une racine double. En déduire sa décomposition en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$
Même question pour $P(X) = X^4 + 2X^2 - 8X + 5$

Exercice 14

a et b tant des nombres réels, déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de la forme $P(X) = 3X^5 - 10X^3 + aX + b$ ayant un zéro d'ordre de multiplicité égal 3.

Exercice 15

Calculer le pgcd de :
a) $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^2 + X + 1$
b) $P = X^4 + 2X^3 - 11X^2 - 12X + 36$ et $Q = 4X^3 + 6X^2 - 22X - 12$

Exercice 16

Décomposer en éléments simples $\dfrac{X^3 + 2X - 5}{X - 1}$ et $\dfrac{X^4 + +5X^3 + 3X - 2}{(X-1)^4}$

Exercice 17

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles $\dfrac{X^2 + 3X + 5}{X^2 + X - 2}$, $\dfrac{X^4 + 1}{X^2 + 3X + 2}$, $\dfrac{X^2}{(X-1)(X-2)(X-3)}$.

Exercice 18

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^3 - 1}$

Exercice 19

Trouver des polynômes U et V tels que $U(X^2+X+1)+V(X^2+1)=1$.
En déduire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^2+X+1}X^2+1$

Exercice 20

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $pgcd(X^n-1, X^p-1) = X^{pgcd(n,p)-1}$

Exercice 21

a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{3X+5}{X^3+6X^2+11X+6}$

b) Calculer $F^{(n)}(X), \quad n \in \mathbb{N}$.

c) En déduire

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3k+5}{k^3+6k^2+11k+6}$$