

## TD1 : Logique et Ensembles

### Exercice 1

1. Prouver les relations logiques

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

2. Prouver les relations ensemblistes

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

### Exercice 2

Donner la négation des assertions suivantes :

$$P \wedge \neg Q, \quad P \vee (Q \wedge R), \quad P \Rightarrow Q, \quad P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), \quad P \Leftrightarrow Q$$

### Exercice 3

Soient  $A$  et  $B$  deux assertions. Montrer que les assertions  $(A \Rightarrow B)$  et  $(\neg B \Rightarrow \neg A)$  sont équivalentes

### Exercice 4

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois assertions. Montrer que les assertions suivantes sont des tautologies.

- $A \wedge \neg A \Rightarrow B$
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \Leftrightarrow \neg B)$
- $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Leftrightarrow (B \Rightarrow C))$
- $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow ((A \vee C) \Leftrightarrow (B \vee C))$
- $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow ((A \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C))$

### Exercice 5 (Différences symétriques)

Soit  $E$  un ensemble ;  $A$  et  $B$  des sous-ensembles de  $E$ . On rappelle que  $A \setminus B = A \cap B^c$  et on définit la différence symétrique de  $A$  et  $B$  par

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Faire un dessin pour illustrer cette définition.
2. Soient  $A, B, C, D$  des sous-ensembles de  $E$ . Prouver que
  - i)  $A^c \triangle B^c = A \triangle B$
  - ii)  $A \triangle B = \emptyset$  ssi  $A=B$

- iii) Si  $A \triangle B = A \triangle C$  alors  $B = C$
- iv) Si  $A \triangle B = A \cap B$  alors  $A = B = \emptyset$ .

**Exercice 6**

Montrer que  $\forall x \in \mathbb{N}; \exists y \in \mathbb{N}$  tel que  $y > x$ . En revanche, montrer que l'assertion  $\exists y \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall x \in \mathbb{N}; y > x$  est fausse.

**Exercice 7**

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On appelle  $Epi(f)$  l'ensemble  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq f(x)\}$ . Montrer que  $f \leq g \Rightarrow Epi(f) \subset Epi(g)$ .