

TD2 : Ensembles/ Applications

Exercice 1

Soit $A = \{0, 1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 4, 1, 7\}$. On définit des applications f et g de A dans B par :

$$f(0) = 0; f(1) = 7; f(3) = 1; f(2) = 4$$

$$g(0) = 1; g(3) = 7; g(1) = 1; g(2) = 0$$

1. Déterminer l'image directe par g de l'ensemble A , l'image réciproque (par g) de $\{0, 1\}$ puis de $\{7, 4\}$.
2. Que peut-on dire de l'application f ?
3. Que peut-on dire de l'application g ?

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, l'application f est-elle injective, bijective, surjective ?

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2 \quad x \mapsto x^2 \quad x \mapsto x^2 \quad x \mapsto x^2$$

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad f : \mathbb{Q}^* \rightarrow \mathbb{Q}^* \quad g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 \quad x \mapsto \frac{1}{x} \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto n + 1 \quad n \mapsto n + 1 \quad n \mapsto 2n \quad n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Exercice 3

Soit $E = \{1, 2, 3\}$ écrire les éléments de $\mathcal{P}(E)$. Attention aux accolades !

Exercice 4

Exprimer la relation entre les deux éléments de chacun des couples suivants, à l'aide des signes d'inclusion et appartenance :

$$(\emptyset, \mathbb{R}), (1, \mathbb{Z}), (\{1\}, 1), (\mathbb{R}, \mathbb{Z}), (\{1, 2\}, P(\mathbb{Z}))$$

$$(\{1, 2\}, \mathbb{Z}), (\{\emptyset\}, P(E)), (\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{\emptyset\}), (\emptyset, P(E))$$

$$(\{f \mid f \text{ fonction continue sur } \mathbb{R}\}, \{f \mid f \text{ fonction dérivable sur } \mathbb{R}\})$$

$$(\mathbb{R}, \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ nombre premier}\})$$

Exercice 5

On considère la fonction partie entière E , la fonction identité id , et la fonction carré $f(x) = x^2$, définies sur \mathbb{R} .

Déterminer pour chacune de ces fonctions :

1. les images de :

$$\mathbb{R}, A = [0, 3], B =]3, 4[,] - 2, 1[$$

2. les images réciproques de :

$$\mathbb{R}, \left\{\frac{1}{2}\right\}, \{5\},]2, 9]$$

3. Déterminer :

$$E(A \cap B) \text{ et } E(A) \cap E(B)$$

Exercice 6

Soient E et F des ensembles. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : E \rightarrow F$ deux applications.

Soient X et X' des parties de E . Soient Y, Y' des parties de F . Comparer les ensembles suivants :

1. $f(X \cup X')$ et $f(X) \cup f(X')$
2. $f(X \cap X')$ et $f(X) \cap f(X')$
3. $f^{-1}(Y \cap Y')$ et $f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y')$
4. $f^{-1}(Y \cup Y')$ et $f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y')$
5. X et $f^{-1}(f(X))$
6. Y et $f(f^{-1}(Y))$

Exercice 7

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Montrer que f est injective si et seulement si $X = f^{-1}(f(X))$ pour tout $X \subseteq E$

Montrer que f est surjective si et seulement si $Y = f(f^{-1}(Y))$ pour tout $Y \subseteq F$

Exercice 8

Soient E, F et G trois ensembles. Soient deux applications $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

1. Montrer que : $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.
2. Montrer que : $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.

Exercice 9

Soit E un ensemble et f une application injective de E dans E , c'est à dire une application vérifiant :

$$\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2.$$

On définit par récurrence sur $n \geq 1$ des applications f^n par

$$f^1 = f \qquad f^n = f \circ f^{n-1}$$

où $f \circ g$ désigne la fonction composée de g par f définie par

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

pour tout $x \in E$ et toute application $g : E \rightarrow E$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$ l'application f^n est injective.
2. Montrer que si f surjective, pour tout $n \geq 1$, l'application f^n est surjective.