

TD3 : Image réciproque, composée, géométrie

Exercice 1

Soit $E = \{0, 1, 2, 3\}$, $F = \{0, 4, 1, 7\}$ et $G = \{2, 4, -1, 1\}$. On définit des applications $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ par

$$f(0) = 0; f(1) = 7; f(3) = 1; f(2) = 0$$

$$g(0) = 2; g(7) = -1; g(1) = 2; g(4) = 1.$$

1. Calculer $g \circ f(x)$ pour tout $x \in E$
2. Calculer $(g \circ f)^{-1}(\{2, 1\})$

Exercice 2

On définit les deux relations suivantes sur l'ensemble des personnes :

- a) Une personne x est en relation avec une autre personne y si x et y passent au moins dix heures par semaine ensemble.
- b) x et y sont en relation si x et y passent tout leur temps ensemble.

Ces relations sont-elles des relations d'équivalence ?

Exercice 3

Soit $E = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ sur E par

$$x \mathcal{R} y \text{ si } x^2 = y^2$$

- a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- b) Déterminer la classe d'équivalence de 0.
- c) Combien y a-t-il de classes d'équivalences dans E pour la relation $\mathcal{R}$?

Exercice 4 (exercice de la semaine dernière)

Soient E et F des ensembles. Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Soient X et X' des parties de E . Soient Y, Y' des parties de F . Comparer les ensembles suivants :

1. $f(X \cup X')$ et $f(X) \cup f(X')$
2. $f(X \cap X')$ et $f(X) \cap f(X')$
3. $f^{-1}(Y \cap Y')$ et $f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y')$
4. $f^{-1}(Y \cup Y')$ et $f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y')$
5. X et $f^{-1}(f(X))$
6. Y et $f(f^{-1}(Y))$

Exercice 5

Montrer que la projection sur une droite D par rapport à une droite D' est une surjection. Déterminer l'image réciproque d'un point A

Exercice 6

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Montrer que f est injective si et seulement si $X = f^{-1}(f(X))$ pour tout $X \subseteq E$

Montrer que f est surjective si et seulement si $Y = f(f^{-1}(Y))$ pour tout $Y \subseteq F$

Exercice 7

Soient E , F et G trois ensembles. Soient deux applications $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

1. Montrer que : $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.
2. Montrer que : $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $\mathfrak{S}_n$ comme l'ensemble des bijections de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$. On définit la loi $\circ$ sur $\mathfrak{S}_n$ par $\sigma \circ \tau(x) = \sigma(\tau(x))$. C'est la composée des deux bijections. Pour visualiser un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on le notera

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

- a) Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
- b) Montrer que $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe.
- c) Montrer que $\circ$ n'est pas commutative (on pourra se restreindre au cas $n = 3$).
- d) Soit $f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Comparer $(f \circ g)^{-1}$ et $f^{-1} \circ g^{-1}$.