TD3 : Image réciproque, composée, relations

Quelques exercices sont repris de la feuille précédente.

Exercice 1
Soit $E = \{0, 1, 2, 3\}$, $F = \{0, 4, 1, 7\}$ *et* $G = \{2, 4, -1, 1\}$. *On définit des applications* $f : E \to F$ *et* $g : F \to G$ *par*

$$f(0) = 0;\ f(1) = 7;\ f(3) = 1;\ f(2) = 0$$

$$g(0) = 2;\ g(7) = -1;\ g(1) = 2;\ g(4) = 1.$$

1. *Calculer* $g \circ f(x)$ *pour tout* $x \in E$
2. *Calculer* $(g \circ f)^{-1}(\{2, 1\})$

Exercice 2
Montrer que la composée de deux injections est une injection.
Faire de même avec les surjections.

Exercice 3
Montrer que si $f \circ g$ *est injective alors* g *est injective.*
Trouver un exemple où $f \circ g$ *est injective et* f *n'est pas injective.*

Exercice 4
On définit les deux relations suivantes sur l'ensemble des personnes :

a) *Une personne* x *est en relation avec une autre personne* y *si* x *et* y *passent au moins dix heures par semaine ensemble.*

b) x *et* y *sont en relation si* x *et* y *passent tout leur temps ensemble.*

Ces relations sont-elles des relations d'équivalence ?

Exercice 5
Soit $E = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, *on définit la relation* $\mathcal{R}$ *sur* E *par*

$$x \,\mathcal{R}\, y \text{ si } x^2 = y^2$$

a) *Montrer que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

b) *Determiner la classe d'équivalence de* 0.

c) *Combien y a-t'il de classes d'équivalences dans* E *pour la relation* $\mathcal{R}$ *?*

Exercice 6
Soient E et F des ensembles. Soit $f : E \to F$ *une application.*
Soient X et X' des parties de E. Soient Y,Y' des parties de F. Comparer les ensembles suivants :

1. $f(X \cup X')$ *et* $f(X) \cup f(X')$
2. $f(X \cap X')$ *et* $f(X) \cap f(X')$
3. $f^{-1}(Y \cap Y')$ *et* $f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y')$
4. $f^{-1}(Y \cup Y')$ *et* $f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y')$
5. X *et* $f^{-1}(f(X))$
6. Y *et* $f(f^{-1}(Y))$

Exercice 7
Montrer que la projection sur une droite D par rapport à une droite D' est une surjection. Déterminer l'image réciproque d'un point A

Exercice 8
Soit $f : E \to F$ une application.
Montrer que f est injective si et seulement si $X = f^{-1}(f(X))$ pour tout $X \subseteq E$
Montrer que f est surjective si et seulement si $Y = f(f^{-1}(Y))$ pour tout $Y \subseteq F$

Exercice 9
Soit E un ensemble, et soit G l'ensemble des fonctions de E dans E.
On définit la relation suivante sur G :

$$f\mathcal{R}g \Leftrightarrow f \circ f = g \circ g.$$

(i) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
(ii) Trouver un exemple où deux applications différentes sont en relation.
(iii) Qu'en est-il pour

$$f\mathcal{R}'g \Leftrightarrow f \circ g = g \circ f?$$

(iv)Mêmes questions que (i) et (ii) pour

$$f\mathcal{R}g \Leftrightarrow \exists \text{ une bijection } h \text{ telle que } h \circ f \circ h^{-1} = g.$$