TD4 :Relations/Groupes

Exercice 1
Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{C}^*$ par

$$z\,\mathcal{R}\,z' \quad si \quad \frac{z}{z'} \in \mathbb{R}^{+*}.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et décrire (sans démonstration) les classes d'équivalence .

Exercice 2
On définit les deux relations sur $\mathbb{R}^2$, $\preceq$ et $\dashv$ par

$$(x,y) \preceq (x',y') \text{ si } x \leqslant x' \text{ ou } y \leqslant y',$$

$$(x,y) \dashv (x',y') \text{ si } x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y'.$$

Ces relations sont-elles des relations d'ordre ?

Exercice 3
On munit $\mathbb{N}^*$ de la relation $\preceq$ définie par

$$p \preceq q \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\, p^n = q.$$

a) *Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?*

b) *La partie $\{2,3\}$ est-elle majorée ?*

Exercice 4
On muni $E = \{0,1,\ldots,4\}$ de la loi de composition interne $\star$ définie par $c = a \star b$ si

$$\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } c + 5k = a + b.$$

Ecrire la table de la loi $\star$.
Est-ce que (E,$\star$) est un groupe ?
Faire de même avec $F = \{1,\ldots,4\}$ et $\dashv$ définie par $c = a \dashv b$ si

$$\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } c + 5k = a \times b.$$

En déduire une structure de corps sur E.

Exercice 5
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $\mathfrak{S}_n$ comme l'ensemble des bijections de $\{1,\ldots,n\}$ dans $\{1,\ldots,n\}$. On définit la loi $\circ$ sur $\mathfrak{S}_n$ par $\sigma \circ \tau(x) = \sigma(\tau(x))$. C'est la composée des deux bijections. Pour visualiser un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on le notera

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

a) Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Montrer que $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe.

c) Montrer que $\circ$ n'est pas commutative (on pourra se restreindre au cas $n = 3$).

d) Soit $f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Comparer $(f \circ g)^{-1}$ et $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice 6 (*)

a) Soit $E = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid \exists\, a \in \mathbb{C}^*, \exists\, b \in \mathbb{C} \forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = az + b\}$ muni de la composition. Montrer que c'est un groupe. Ce groupe est-il commutatif ?

b) Qu'en est-il pour $E = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid \exists\, a \in \mathbb{C}^*, \exists\, b \in \mathbb{C} \forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = a\overline{z} + b\}$ muni de la composition ?

Exercice 7 (*)
Déterminer le nombre d'éléments du plus petit groupe non-commutatif.

Exercice 8 (*)
Soit $(G, .)$ un groupe,
i) Montrer que si e et e' sont des éléments neutres alors $e = e'$.
ii) Soit $g \in G$, $\Phi_g : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ h & \mapsto & g.h \end{array} \right.$, $\Psi_g : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ h & \mapsto & g.h.g^{-1} \end{array} \right.$ Montrer que Φ et Ψ sont des bijections.
iii) Soit $\mathcal{R}$ la relation

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists g,\ \Psi_g(x) = y.$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence.
iv) Montrer que $(\{\psi_g \mid g \in G\}, \circ)$ est un groupe. Trouver un exemple où il n'est pas isomorphe à G.