TD5 : Relations/Groupe/Anneaux...

Exercice 1
Soit A, B deux points du plan $\mathbb{R}^2$. Dire (sans démonstration) si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence (ou d'ordre) et si oui déterminer les classes d'équivalences.
a) $x\mathcal{R}y$ *si* x *et* y *sont équidistant de* A,
b) $x\mathcal{R}y$ *si* $\vec{Ax} = \vec{yA}$,
c) $x\mathcal{R}y$ *si* $\vec{xy}$ *et* $\vec{AB}$ *sont colinéaire.*
d) $x\mathcal{R}y$ *si* $\mid xy \mid = \mid AB \mid$.

Exercice 2
Justifier rapidement si $\mathcal{R}$ est (ou non) une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. Le cas échéant, déterminer les classes d'équivalences.
- $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y$ *est un multiple de 2.*
- $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy$ *est un multiple de 3.*
- $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y$ *est un multiple de 3.*
- $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y$ *est un multiple de 3. (*)*

Exercice 3
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $\mathfrak{S}_n$ comme l'ensemble des bijections de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$. On définit la loi $\circ$ sur $\mathfrak{S}_n$ par $\sigma \circ \tau(x) = \sigma(\tau(x))$. C'est la composée des deux bijections. Pour visualiser un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on le notera

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

a) *Calculer* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

b) *Montrer que* $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ *est un groupe.*

c) *Montrer que* $\circ$ *n'est pas commutative (on pourra se restreindre au cas* $n = 3$*).*

d) *Soit* $f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. *Comparer* $(f \circ g)^{-1}$ *et* $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice 4
Soit A l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit A de l'addition et du produit usuels $((f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x))$.

1. *Montrer que A est un anneau. Est-il intègre ?*
2. *Donner les éléments inversibles de A.*

Exercice 5
Soit $A = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, *muni du produit et de la multiplication complexe. Montrer que* A *est un sous-anneau de* $\mathbb{C}$ *et donner ses éléments inversibles.*

Exercice 6 (*)
Soit $(G, \circ)$ *un groupe,* e *son élément neutre et* F *un ensemble.*
On dit que G *agit sur* F *via* $\cdot$ *si* $\cdot$ *et une application de* $G \times F$ *vers* F *telle que* $(g \circ g') \cdot f = g \cdot (g' \cdot f)$ *et* $e \cdot f = f$ *pour tous* $g, g' \in G$ *et* $f \in F$.
On définit la relation $\mathcal{R}$ *sur* F *par*

$$x\mathcal{R}y \text{ si et seulement si } \exists g \in G,\ g \cdot x = y.$$

Quelles propriétés vérifie $\mathcal{R}$ *?*

Exercice 7 (*)

a) *Soit* $E = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid \exists\, a \in \mathbb{C}^*, \exists\, b \in \mathbb{C} \forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = az + b\}$ *muni de la composition. Montrer que c'est un groupe. Ce groupe est-il commutatif ?*

b) *Qu'en est-il pour* $E = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid \exists\, a \in \mathbb{C}^*, \exists\, b \in \mathbb{C} \forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = a\overline{z} + b\}$ *muni de la composition ?*

Exercice 8 (*)
Déterminer le nombre d'éléments du plus petit groupe non-commutatif.

Exercice 9 (*)
Soit $(G, .)$ *un groupe,*
i) Montrer que si e *et* e' *sont des éléments neutres alors* $e = e'$.
ii) Soit $g \in G$, $\Phi_g : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ h & \mapsto & g.h \end{array} \right.$, $\Psi_g : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ h & \mapsto & g.h.g^{-1} \end{array} \right.$ *Montrer que* Φ *et* Ψ *sont des bijections.*
iii) Soit $\mathcal{R}$ *la relation*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists g,\ \Psi_g(x) = y.$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence.
iv) Montrer que $(\{\psi_g \mid g \in G\}, \circ)$ *est un groupe. Trouver un exemple où il n'est pas isomorphe à* G.