TD6 : $\mathbb{N}$

Exercice 1
Redémontrer par récurrence sur n les formules de sommes arithméthiques et géométriques

$$\sum_{k=0}^{n-1} n_0.q^k = n_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} n_0 + r.k = n \times n_0 + r \times \frac{n(n-1)}{2}$$

Exercice 2
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{k=0}^{n}(3k+1) = \frac{1}{2}(3n^2+5n+2)$$

Exercice 3
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $2^{3^n} - 2$ est divisible par 3.
Attention ! $x^{y^z} = x^{(y^z)} \neq (x^y)^z = x^{y \times z}$.

Exercice 4 (*)
Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable. (Indication : On pourra supposer qu'il existe f une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et s'interesser à $E = \{y \mid y \notin f(y)\}$).

Exercice 5
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1}(3k^2+3k+1) = n^3.$$

Exercice 6 (*)

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (p,q) & \mapsto & \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)+p \end{array} \right.$

- *Montrer pour $q > 0$: $f(p+1, q-1) = f(p,q)+1$ et $f(0,p+1) = f(p,0)+1$.*
- *Montrer que : $f(0,p+q) \leqslant f(p,q) < f(0,p+q+1)$.*
- *Montrer que $g : n \mapsto f(0,n)$ est strictement croissante.*
- *Montrer que f est injective (on supposera $f(p,q) = f(p',q')$ et on montrera dans un premier temps que $p+q = p'+q'$).*
- *Montrer que f est surjective.*
- *Chercher une interprétation graphique de ce résultat.*

– *En déduire qu'il existe une surjection de* $\mathbb{N}$ *sur* $\mathbb{Q}$.

Exercice 7 (*)

On veut montrer que il n'existe pas $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tel que* $f \circ f(n) = n + 2009$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
Soit $E = \{0, \ldots 2008\}$, $F = \mathbb{N} \setminus E$, $G = f(\mathbb{N}) \cap E$ *et* $H = E \setminus G$.
Si f *existe, montrer que*
1) f *est injective*
2) $f(F) \subset F$
3) $f^{-1}(F) = F \cup G$
4) $f^{-1}(G) = H$
...Et trouver une contradiction.