Université de Brest 2009 - 2010

L1-Algèbre -géométrie

TD 7-8

Exercice 1.

Soit $(G, .)$ un groupe tel que $x^2 = 1_G \quad \forall x \in G$.

Montrer que G est commutatif.

Exercice 2.

Soit $(G, .)$ un groupe. $H \subset G$.

On dit que H est sous groupe de G si **i)**$H \neq \emptyset$ et **ii)**$\forall x, y \in H \qquad xy^{-1} \in H$.

1) Montrer que l'intersection de deux sous-groupes de G est un sous groupe de G.

2) On suppose que $G = \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n\mathbb{Z}$ est un sous groupe de G.

Exercice 3.

1) Montrer que l'ensemble des nombres complexes de module 1, muni de la multiplication est un groupe.

2) Montrer que l'ensemble des racines de $z^n = 1$ dans $\mathbb{C}$, muni de la multiplication est un groupe. ($n \in \mathbb{N}$)

Exercice 4.

Montrer par récurrence que

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^{3^n} - 2$ est divisible par 3.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}(3k+1) = \frac{3n^2+5n+2}{2}$$

4) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}(3k^2+3k+1) = n^3$$

5) $\forall n \in \mathbb{N}, 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1(2n+1)}{6}$

6) Calculer $\quad 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$

Exercice 5.

Soit E un ensemble. $P(E)$ l'ensemble des parties de E.

Montrer que $(P(E), \Delta, \bigcap)$ est un anneau commutatif unitaire.

Exercice 6.

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

1) $z^2-(9-2i)z+26=0$

2) $2iz^2-(6+6i)z+5=0$

3) $z^6+z^4+z^2+1=0$

4) $z^3=1+i$

5) $(z-1)^3=(z-i)^3$

Exercice 7.

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe vérifiant :

1) $|\dfrac{z+1}{z-2i}| = 1$

2) $|\dfrac{z+1}{z-2i}| = 2$

3) $\dfrac{z+1}{z-2i}$ est réel

4) $\dfrac{z+1}{z-2i}$ est imaginaire pur

5) $Arg(\dfrac{z+1}{z-2i}) = \dfrac{\pi}{2}$