Université de Brest 2009 - 2010

L1-Algèbre -géométrie

TD 9-10-11-12

Exercice 1

résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^3 = 1 + i\sqrt{3}$

2) $(1+i)z^4 = 1 + i\sqrt{3}$

3) $\overline{z} = z^3$

Exercice 2

Calculer les racines quatrièmes de $a = 1 + i\sqrt{3}$.

En déduire les valeurs de $\cos(\frac{13\pi}{12})$ et de $\sin(\frac{13\pi}{12})$.

Exercice 3

Calculer $a = (\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i})^{30}$

Exercice 4

On pose $z = (\sqrt{3} + i)^n$.

Déterminer les entiers n pour que z soit réel. réel positif. Imaginaire pur.

Exercice 5

On pose $a = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

Calculer a^4. En déduire le module et un argument de a.

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tels que $\mid az \mid = 8$.

Exercice 6

Calculer $S = 1 + \cos(\frac{2\pi}{5}) + \cos(\frac{4\pi}{5}) + \cos(\frac{6\pi}{5}) + \cos(\frac{8\pi}{5})$.

Exercice 7

Soient $n \in N$, $\theta \in]0, \pi[$.

On pose $S_n = \cos^2\theta + \cos^2\theta\cos 2\theta + \ldots + \cos^p\theta\cos p\theta + \ldots + \cos^n\theta\cos n\theta$,

$S'_n = \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta\cos 2\theta + \ldots + \cos^p\theta\sin p\theta + \ldots + \cos^n\theta\sin n\theta$ et

$\Sigma_n = S_n + iS'_n$.

Calculer Σ_n.

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z+1)^5 - (z-1)^5 = 0$.

Comment aurait-on pu prévoir que les solutions seraient imaginaires pures?

Exercice 9

Rsoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$, Sachant qu'elle admet une solution réelle.

Construire les images des trois solutions dans le plan complexe et vérifier que le triangle obtenu est rectangle isocèle. **4)**

Exercice 10

Démontrer que le nombre $3^{8n}\, 5^4 + 5^{6n}\, 7^3$ est divisible par 11 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11

Calculer x_n, $0 \leq x_n < 7$, tel que $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1 \equiv x_n$ (modulo 7). n étant un entier arbitraire.

Exercice 12

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 4^n + 15n - 1 \equiv 0$ modulo 9.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^{4n+2} \equiv 4$ modulo 5 .

3) $n \in \mathbb{N}$, on pose $f(n) = 3^{2n} + 3^n + 1$.

Montrer que $f(n+3) - f(n) \equiv 0$ modulo 13.

Donner toutes les valeurs de n satisfaisant $f(n) \in 13\mathbb{Z}$.

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$,

a) $\overline{5}\overline{x} = \overline{5}$.

b) $\overline{6}\overline{x} = \overline{6}$.

c) Calculer $\overline{10^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14

En appliquant l'algorithme d'Euclide, calculer le pgcd de :

a) 2431 et 1342

b) 13579 et 2468

Exercice 15

a et b deux éléments de $\mathbb{Z}$. On pose $A = 11a + 2b$ et $B = 18a + 5b$.

1) Démontrer que $19 \mid A \Leftrightarrow 19 \mid B$

2) On suppose que a et b sont premiers entre eux.

Montrer que A et B sont premiers entre eux ou le pgcd de A et B est 19.

Exercice 16

a et b deux éléments de $\mathbb{Z}$. Montrer que le pgcd de $13a - 11b$ et $5a - 16b$ est 1 ou 7.

Exercice 17

1) Soit $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'application définie par $f(x) = 2^m \times 3^n$. Montrer que f est injective.

2) Soit $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ l'application définie par $g(x) = 2^m(2n+1)$. Montrer que f est bijective.

Exercice 18

Soient n et m deux entiers relatifs tels que $n^2 - m^2$ est premier.

Montrer que n et m sont consécutifs.

Exercice 19

1) Construire la table de multiplication de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. En déduire que $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps.

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : $7x + 5y = 11$.

Exercice 20

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

1) $-55x + 50y = 95$.

2) $120x + 760y = 280$.

3) $102x - 323y = 323$.

Exercice 21

Montrer que $a \in \mathbb{K}$ est une racine double d'un polynôme P si et seulement si $P(a) = P'(a) = 0$. Généraliser ce résultat pour les racines n-ièmes

Exercice 22

Montrer que le polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$ admet une racine double. En déduire sa décomposition en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$
Même question pour $P(X) = X^4 + 2X^2 - 8X + 5$

Exercice 23

a et b tant des nombres réels, déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de la forme $P(X) = 3X^5 - 10X^3 + aX + b$ ayant un zéro d'ordre de multiplicité égal 3.

Exercice 24

Calculer le pgcd de :
a) $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^2 + X + 1$
b) $P = X^4 + 2X^3 - 11X^2 - 12X + 36$ et $Q = 4X^3 + 6X^2 - 22X - 12$

Exercice 25

Décomposer en éléments simples $\dfrac{X^3 + 2X - 5}{X - 1}$ et $\dfrac{X^4 + +5X^3 + 3X - 2}{(X-1)^4}$

Exercice 26

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles $\dfrac{X^2 + 3X + 5}{X^2 + X - 2}$, $\dfrac{X^4 + 1}{X^2 + 3X + 2}$, $\dfrac{X^2}{(X-1)(X-2)(X-3)}$.

Exercice 27

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^3 - 1}$

Exercice 28

Trouver des polynômes U et V tels que $U(X^2+X+1)+V(X^2+1)=1$.
En déduire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1}{X^2+X+1}X^2+1$

Exercice 29

Soient $n,p\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $pgcd(X^n-1,X^p-1)=X^{pgcd(n,p)-1}$

Exercice 30

a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F(X)=\dfrac{3X+5}{X^3+6X^2+11X+6}$

b) Calculer $F^{(n)}(X), \quad n\in\mathbb{N}$.

c) En déduire

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{3k+5}{k^3+6k^2+11k+6}$$