TD10 : De la suite du TD9

Exercice 1 (Sous-espaces caractéristiques et polynome minimal)

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(i) Déterminer les valeurs propres de A. La matrice est-elle trigonalisable ?

(ii) Déterminer ses sous-espaces propres. Est-elle diagonalisable ?

(iii) Déterminer les sous-espaces caractéristiques de A, ainsi que son polynome minimal.

Exercice 2 (Puissance exponentielle)

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) Calculer le polynome caractéristique de A et décomposer $\mathbb{R}^3$ en somme des sous-espaces caractéristiques.

(ii) Trigonaliser A et en déduire une formule pour A^n et pour $exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$

Exercice 3 (C'est irréel)

Soit $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (y, z, -x-y-z) \end{array} \right.$ *. Décomposer $\mathbb{R}^3$ en sous-espaces caractéristiques de l'endomorphisme u.*

Exercice 4 (C'est irréel II)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) Montrer que $C_A(T) = (T+1)^2(T+2)^2$.

(ii) Montrer que qu'il existe $P \in GL(\mathbb{R})$ tel que PAP^{-1} est une matrice diagonale par blocs 2×2, et donner une méthode pour calculer P.