TD2

Exercice 1 (La base des bases)

1. On pose $E = \mathbb{k}^2$. Soit $f : E \rightarrow E$

$$(x, y) \mapsto (x + 2y, 3x + y)$$

i) Ecrire la matrice de l'application f dans la base canonique.

ii) Déterminer le noyau et l'image de f .

2. Mêmes questions avec $E = \mathbb{k}^3$ et $f : E \rightarrow E$

$$(x, y, z) \mapsto (3x + 2y, 3y + 2z, -4z + 9x)$$

3. Ecrire la matrice de cette dernière application dans la base $((0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$ (après avoir vérifié que cette dernière famille est une base de E).

Exercice 2 (Revoilà les polynômes)

On considère l'espace vectoriel E des polynômes de degré inférieur à 3 et l'application $D : E \rightarrow E$ de dérivation.

i) Ecrire la matrice de l'application D dans la base canonique B .

ii) Déterminer le noyau et l'image de D .

iii) Ecrire la matrice de D dans la base $B' = ((X - 1)^n)_{n=0,1,2}$.

iv) Ecrire la matrice de passage de B à B' .

v) Refaire l'exercice dans le cadre plus général $E = \mathbb{k}_N[X]$ avec $N \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 (Matrices de matrices)

Dans chacun des cas ci-dessous, E et F seront deux espaces vectoriels donnés de dimension finie. On se donnera aussi une application $f : E \rightarrow F$. On demande de vérifier que l'application est une application linéaire et d'écrire la matrice de l'application f dans des bases de votre choix.

– $E = F = M_2(\mathbb{k})$. On pose f comme étant l'application de transposition : $A \mapsto A^t$.

– $E = M_2(\mathbb{k})$, $F = M_{2,3}(\mathbb{k})$. On pose $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$. On définit f par $f.B = B.A$ pour $B \in E$.

Exercice 4 (Un peu de réflexion)

Soit $E = \mathbb{R}^2$. Soit $D \subset E$ la droite d'équation $x - 2y = 0$. On définit $S : E \rightarrow E$ comme étant la symétrie orthogonale par rapport à D .

Ecrire la matrice de S dans la base canonique et dans une base de votre choix (Essayez de vous faire en sorte que la matrice soit plus simple).

Ecrire la matrice de passage d'une base à l'autre. Déterminer le noyau de $S - Id$ et le noyau de $S + Id$. Interprétation géométrique ?

Corrigé TD1 : Exercice 5 (Sous-espace engendré)

L'ensemble engendré par les éléments

$$F_{i,j} = (E_{i,j} - E_{j,i})$$

est l'ensemble des matrices symétriques. En effet toute matrice symétrique $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ s'écrit $\sum_{i < j} a_{i,j} F_{i,j} + 1/2 \sum_{i=1}^n a_{i,i} F_{i,i}$. Et réciproquement toute combinaison linéaire des $F_{i,j}$ est symétrique.

Cette famille n'est pas libre. En effet $F_{i,j} - F_{j,i} = 0$ pour $i \neq j$. (Cela suppose $n > 1$). On a vu que $\{F_{i,j} | i \leq j\}$ est une famille génératrice. Il est facile de voir qu'elle est libre.

Exercice 6 ($\mathbb{R}$ -ev vs $\mathbb{C}$ -ev)

I) $\mathbb{R}$ -Base de $\mathbb{C}$: $(1, i)$

II) 1) Un $\mathbb{C}$ -ev de dimension n est un $\mathbb{R}$ -ev de dimension $2n$. En effet, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une $\mathbb{C}$ -base de E alors $(e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n)$ est une $\mathbb{R}$ -base de E .

2-3) Une $\mathbb{R}$ -combinaison linéaire d'éléments de E est aussi une $\mathbb{C}$ -combinaison linéaire. On en déduit 2 choses : une famille $\mathbb{C}$ -libre est $\mathbb{R}$ -libre et une famille $\mathbb{R}$ -génératrice est $\mathbb{C}$ -génératrice (écrire les équations pour bien comprendre). Les réciproques sont fausses : 1 est $\mathbb{C}$ -génératrice mais pas $\mathbb{R}$ -génératrice de $\mathbb{C}$; tandis que $(1, i)$ est $\mathbb{R}$ -libre, mais pas $\mathbb{C}$ -libre.