TD6 : La fin de la diagonalisation ?

Exercice 1 (Mon ami Poly)
Soit $E = \Bbbk_N[X]$ *(On fera tout d'abord les calculs dans le cas* $N = 2$*). On considère les endomorphismes* f *et* g *suivants :*

$$f(P)(X) = P(X-2) \qquad g(P)(X) = P(X+1) - P'(X).$$

Determiner les valeurs propres et sous-espaces propres de f *et* g*. Diagonaliser ces endomorphismes*

Exercice 2 (Utilisez quelques théorèmes, ça peut servir)
Les matrices suivantes sont-elles trigonalisables ? diagonalisables ? (On considérera les cas $\Bbbk = \mathbb{C}$ *ou* $\Bbbk = \mathbb{R}$*.)*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (Valeurs propres multiples)
Diagonaliser ou trigonaliser (suivant possibilité) les matrices suivantes sur $\mathbb{R}$*.*

$$A_1 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Résoudre maintenant le système $A_1X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *par une méthode moins couteuse que la résolution globale.*

Mêmes questions avec $A_2X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $A_3X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Exercice 4 (Ben, oui, tiens ! ça c'est une bonne question...)
Soit A *une matrice réelle*

Montrer que si A *est diago(resp. trigo)nalisable sur* R *alors elle est diago(resp. trigo)nalisable sur* $\mathbb{C}$*. Donner des contre-exemples des réciproques*

Montrer que si A *est diagonalisable sur* $\mathbb{C}$*, avec des valeurs propres réelles, alors elle est diagonalisable sur* $\mathbb{R}$*.*

Exercice 5
et puis une petite 5×5 *Diagonaliser* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$