TD7 : Où viennent les polynômes annulateurs

Exercice 1 (Ben, oui, tiens ! ça c'est une bonne question...)
Soit A une matrice réelle

Montrer que si A est diago(resp. trigo)nalisable sur R alors elle est diago(resp. trigo)nalisable sur $\mathbb{C}$. Donner des contre-exemples des réciproques

Montrer que si A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, avec des valeurs propres réelles, alors elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (Les cas de base)
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des nombres complexes non necessairement distincts. On note $\mu_1, \dots, \mu_k$ ces memes nombres complexes, sans répétition. On note $m_i = \sharp\{j \in [\![1, n]\!] | \mu_i = \lambda_j\}$. Calculer le polynome caractéristique et le polynome minimal de chacune des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mu_1 & a \\ 0 & \mu_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mu_1 & a \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

$$A_i = \begin{pmatrix} \mu_i & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & \mu_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{C}) \qquad \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_k \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (un peu de puissance)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer A^4 et A^{-1} grace à Cayley-Hamilton.

Meme question pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4 (un peu plus de puissance)
Dans les deux cas suivants, diagonaliser et calculer A^n :

$$a)A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b)A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 (Sans maitrise la puissance n'est rien)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trigonaliser A. Calculer le polynome minimal de A et donner une forme générale pour A^n grace à l'exercice 4 a)