

TD8 : suite du TD7

Exercice 1 (La puissance de Cayley-Hamilton)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer A^4 et A^{-1} grâce à Cayley-Hamilton.

Même question pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 (La puissance de la diagonalisation...)

Dans les deux cas suivants, diagonaliser et calculer A^n :

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère les suites récurrentes u, v et w vérifiant ceci :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{cases}.$$

Calculer u_n, v_n et w_n en fonction de u_0, v_0 et w_0

Exercice 3 (...et de la trigonalisation)

Trigonaliser cette matrice et calculer sa puissance n -ième $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 4 (La puissance ultime)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On donne deux méthodes pour calculer A^n .

1. Calculer le polynôme minimal de A . Montrer qu'on peut écrire A^n sous la forme $u_n A + v_n Id$, puis calculer les coefficients u_n et v_n grâce à l'exercice précédent
2. Trigonaliser A

Exercice 5 (Polynômes annulateurs)

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{k}$ -espace vectoriel E vérifiant $f^3 - f^2 + f - Id_E = 0$.

1. Que dire des valeurs propres de f (si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
2. f est-il inversible, si oui, donner son inverse.

Exercice 6 (Un peu d'exercices classiques, ça fait pas de mal...)

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x, y, z, t) | (x + y + z = 0) \text{ et } (x - y + t = 0)\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) | (2y + z - t = 0) \text{ et } (x - z - t = 0)\}$$

Sont-ils supplémentaires ?

Construire un endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ tel que $\text{Ker } f = F$ et $\text{Im}(f) = G$.