

TD9 : Où viennent les sous-espaces caractéristiques

Exercice 1 (Polynômes annulateurs)

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{k}$ -espace vectoriel E vérifiant $f^3 - f^2 + f - Id_E = 0$.

1. Que dire des valeurs propres de f (si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
2. f est-il inversible, si oui, donner son inverse.

Exercice 2 (Diagonalisation simultanée)

Soit u un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{k}^n$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace stable de u .

- (i) Montrer que $u|_F$ est un endomorphisme de F diagonalisable.
- (ii) Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de $\mathbb{k}^n$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que les sous-espaces propres de u sont stables par v . En déduire qu'il existe une base de diagonalisation simultanée pour u et v .

Exercice 3 (Sous-espaces caractéristiques et polynôme minimal)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (i) Déterminer les valeurs propres de A . La matrice est-elle trigonalisable ?
- (ii) Déterminer ses sous-espaces propres. Est-elle diagonalisable ?
- (iii) Déterminer les sous-espaces caractéristiques de A , ainsi que son polynôme minimal.

Exercice 4 (Puissance exponentielle)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Calculer le polynôme caractéristique de A et décomposer $\mathbb{R}^3$ en somme des sous-espaces caractéristiques.
- (ii) Trigonaliser A et en déduire une formule pour A^n et pour $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Exercice 5 (C'est irréel)

Soit $u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (y, z, -x - y - z) \end{cases}$. Décomposer $\mathbb{R}^3$ en sous-espaces caractéristiques de l'endomorphisme u .