TD10

Exercice 1

Soit A_n la matrice antidiagonale de taille n , c'est à dire $A_n = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & / & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ où les espaces vides sont des 0. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Même question pour l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ défini sur la base canonique par $f(e_i) = e_{i+1}$ pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $f(e_n) = e_1$.

Exercice 2

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique de A .

Calculer $\text{Ker}(A - Id)$, $\text{Ker}((A - Id)^2)$ et $\text{Ker}(A - 2Id)$.

Trigonaliser A .

Exercice 3 (Sous-espaces caractéristiques et polynôme minimal)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (i) Déterminer les valeurs propres de A . La matrice est-elle trigonalisable ?
- (ii) Déterminer ses sous-espaces propres. Est-elle diagonalisable ?
- (iii) Déterminer les sous-espaces caractéristiques de A , ainsi que son polynôme minimal.

Exercice 4 (Puissance exponentielle)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Calculer le polynôme caractéristique de A et décomposer $\mathbb{R}^3$ en somme des sous-espaces caractéristiques.
- (ii) Trigonaliser A et en déduire une formule pour A^n et pour $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$

Exercice 5 (C'est irréal)

Soit $u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (y, z, -x - y - z) \end{cases}$. Décomposer $\mathbb{R}^3$ en sous-espaces caractéristiques de l'endomorphisme u .