TD11 : De la Jordanisation des matrices

Exercice 1 (dimension 2)

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Déterminer son polynome caractéristique et son polynome minimal.
En déduire sa forme de Jordan et décomposer M *sous la forme* $M = W + Id$ *où* W *est une matrice nilpotente.*
Soit u *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *associé. Déterminer l'ensemble des sous-espaces stables par* u.

Exercice 2 (Les cas classiques)
Determiner la forme normale de Jordan des matrices suivantes (où $a \in \mathbb{k}$*) :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (Mon dieu ! Un parametre...)

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *(où* $a \in \mathbb{R}$*).*
Determiner les sous-espaces propres et caractéristiques de A. *En déduire une forme de Jordan de* A.

Exercice 4 (dimension 4)
On défini les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Montrer que A *et* B *ont chacun une unique valeur propre de multiplicité 4 (que l'on notera respectivement* λ *et* μ*).*
Pour $n = 1, 2, 3$, *calculer les dimensions de* $Ker(A - \lambda Id)^n$. *Pouvait-on connaitre ces dimensions sans calculs (Memes question pour* B*).*
Que peut-on en déduire sur la forme normale de Jordan de A.