

TD1: Espaces Vectoriels

Exercice 1

Dans chacun des exemples suivants, E est-il un $\mathbb{k}$ -espace vectoriel ? Justifier.

- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$)
- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 6\}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$)
- E est l'ensemble des matrices symétriques de taille 2×2

Exercice 2

On considère les ensembles suivants :

- $\mathcal{U}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ réelles (c'est à dire $u_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$),
- $\mathcal{U}_0$ l'ensemble des suites de $\mathcal{U}$ convergeant vers 0,
- $\mathcal{U}_b$ l'ensemble des suites bornées de $\mathcal{U}$,
- $\mathcal{U}_c$ l'ensemble des suites convergentes de $\mathcal{U}$.

Montrer que

1. $\mathcal{U}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,
2. $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_b, \mathcal{U}_c$ sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{U}$,

Exercice 3

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Parmi les ensembles suivants, lesquels constituent des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$ -espace vectoriels $\mathcal{F}$?

1. $\mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(0) = 0\}$,
2. $\mathcal{F}_1 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(1) = 0\}$,
3. $\mathcal{F}_2 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(0) = 1\}$,
4. $\mathcal{F}_3 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 0\}$,
5. $\mathcal{F}_4 = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ est continue}\}$,
6. $\mathcal{F}_5 = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ est dérivable}\}$,
7. $\mathcal{F}_6 = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ est continue et croissante}\}$.

Exercice 4

Les familles suivantes sont-elles libres ? Justifier

- 1) $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
- 2) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

Donner deux bases de $\mathbb{R}^2$ utilisant les vecteurs précédents

Exercice 5

Soient P_0, P_1, P_2 et P_3 les polynômes définis par

$$\begin{aligned} P_0(X) &= (X-1)(X-2)(X-3), & P_1(X) &= X(X-2)(X-3), \\ P_2(X) &= X(X-1)(X-3), & P_3(X) &= X(X-1)(X-2). \end{aligned}$$

Montrer que ces polynômes forment une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

Montrer qu'ils forment une base des polynômes de degré ≤ 3

Exercice 6

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$. Trouver une base de E et la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$