TD2

Exercice 1 (La base des bases)

1. *On pose* $E = \mathbb{k}^2$. *Soit* $f : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & (x + 2y, 3x + y) \end{array}$
   i) Ecrire la matrice de l'application f *dans la base canonique.*
   ii) Déterminer le noyau et l'image de f.
2. *Mêmes questions avec* $E = \mathbb{k}^3$ *et* $f : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ ,(x, y, z) & \mapsto & (3x + 2y, 3y + 2z, -4z + 9x) \end{array}$
3. *Ecrire la matrice de cette dernière application dans la base* $((0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$ *(après avoir vérifié que cette dernière famille est une base de* E*).*

Exercice 2 (Revoilà les polynômes)

On considère l'espace vectoriel E *des polynomes de degré inférieur à 3 et l'application* $D : E \to E$ *de dérivation.*

i) Ecrire la matrice de l'application D *dans la base canonique* B.
ii) Déterminer le noyau et l'image de D.
iii) Ecrire la matrice de D *dans la base* $B' = ((X - 1)^n)_{n=0,1,2}$.
iv) Ecrire la matrice de passage de B *à* B'.
v) Refaire l'exercice dans le cadre plus général $E = \mathbb{k}_N[X]$ *avec* $N \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 (Matrices de matrices)

Dans chacun des cas ci-dessous, E *et* F *seront deux espaces vecoriels donnés de dimension finie. On se donnera aussi une application* $f : E \to F$. *On demande de vérifier que l'application est une application linéaire et d'écrire la matrice de l'application* f *dans des bases de votre choix.*

– $E = F = M_2(\mathbb{k})$. *On pose* f *comme étant l'application de transposition :* $A \mapsto A^t$.
– $E = M_2(\mathbb{k})$, $F = M_{2,3}(\mathbb{k})$. *On pose* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$. *On définit* f *par* $f.B = B.A$ *pour* $B \in E$.
–

Exercice 4 (Un peu de réflection)

Soit $E = \mathbb{R}^2$. *Soit* $D \subset E$ *la droite d'équation* $x - 2y = 0$. *On définit* $S : E \to E$ *comme étant la symétrie orthogonale par rapport à* D.

Ecrire la matrice de S *dans la base canonique et dans une base de votre choix (Essayez de vous faire en sorte que la matrice soit plus simple).*

Ecrire la matrice de passage d'une base à l'autre. Determiner le noyau de $S - Id$ *et le noyau de* $S + Id$. *Interprétation géométrique ?*