TD5

Exercice 1 (extraits de partiels)
Lesquelles de ces applications sont des endomorphismes de $E = \mathbb{R}^2$

$$a)\ u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \to & (0, y+1) \end{array} \qquad b)\ x \to x - x \qquad c)\ u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \to & x^3 \end{array}$$

$$e)\ u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ v & \to & v^2 + 2v \end{array} \qquad f)\ u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \to & (x^2+1, y^2+1) \end{array}$$

Exercice 2
Soit $\Bbbk = \mathbb{R}$ et $f : \Bbbk^2 \to \Bbbk^2$ l'application définie par $f(x, y) = (y, -x)$.

1. *Interpreter f de façon géométrique.*
2. *Quelles sont les valeurs propres et vecteurs propres de f ?*

Exercice 3 (Mais c'est nul ! ! !)
Soit $f : \begin{array}{ccc} \Bbbk^2 & \to & \Bbbk^2 \\ (x,y) & \to & (0,0) \end{array}$. L'application f est-elle un endomorphisme ? A-t-elle des valeurs propres ? Est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 (Sim & tri)
Soit $E = \mathbb{R}^3 = \{X = (x, y, z)|x, y, z \in \mathbb{R}\}$. On considère $F_1 = \{X|x + 2y = 2z\}$ et $F_2 = \{X|x + 3z + 1 = 0\}$. Le sous-ensemble F_i est-il un sous-espace vectoriel de E ? Si oui, en donner une base, ainsi qu'un supplémentaire G_i dans E.
Soit S_i la symétrie par rapport à F_i parallèlement à G_i. Ecrire la matrice de l'application S_i dans la base canonique de E (si F_i est un s.e.v).

Exercice 5 (Silence, on tourne)

(i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \{f : [\![1; n]\!] \to \Bbbk\}$. Montrer que E est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ? Exhiber une base de E.

(ii) Soit $g : E \to E$ l'application définie ainsi : $g(f)(i) = \begin{cases} f(i+1) & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 0 & \text{si } i = n. \end{cases}$ Montrer que g est un endomorphisme de E. Quelles sont les valeurs propres de g ? Et les vecteurs propres ?

(iii) Mêmes questions (ici $\Bbbk = \mathbb{C}$) avec l'endomorphisme h défini ainsi : $h(f)(i) = \begin{cases} f(i+1) & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ f(1) & \text{si } i = n. \end{cases}$

(iv) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Donner les résultats (presque) sans calculs pour l'endomorphisme t_k défini ainsi : $t_k(f)(i) = \begin{cases} f(i+k) & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n-k \\ f(j) & \text{si } i + k = n + j. \end{cases}$

Exercice 6 (Mon ami Poly)
Soit $E = \Bbbk_N[X]$ (On fera tout d'abord les calculs dans le cas $N = 2$). On considère les endomorphismes f et g suivants :

$$f(P)(X) = P(X - 2) \qquad g(P)(X) = P(X + 1) - P'(X).$$

Determiner les valeurs propres et sous-espaces propres de f et g. Diagonaliser ces endomorphismes