TD6

Exercice 1 (Si vous ne l'avez pas encore fait)
Soit $E = \Bbbk_N[X]$ (On fera tout d'abord les calculs dans le cas $N = 2$). On considère les endomorphismes f et g suivants :

$$f(P)(X) = P(X-2) \qquad g(P)(X) = P(X+1) - P'(X).$$

Determiner les valeurs propres et sous-espaces propres de f et g. Diagonaliser ces endomorphismes

Exercice 2 (Utilisez quelques théorèmes, ça peut servir)
Les matrices suivantes sont-elles trigonalisables ? diagonalisables ? (On considérera les cas $\Bbbk = \mathbb{C}$ ou $\Bbbk = \mathbb{R}$.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (Valeurs propres multiples)
Diagonaliser ou trigonaliser (suivant possibilité) les matrices suivantes sur $\mathbb{R}$.

$$A_1 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Résoudre maintenant le système $A_1X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ par une méthode moins couteuse que la résolution globale.

Mêmes questions avec $A_2X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $A_3X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Exercice 4
Soit A une matrice réelle

Montrer que si A est diago(resp. trigo)nalisable sur R alors elle est diago(resp. trigo)nalisable sur $\mathbb{C}$. Donner des contre-exemples des réciproques

Montrer que si A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, avec des valeurs propres réelles, alors elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5
Diagonaliser $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 6
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\Bbbk)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\Bbbk)$. On note $C = I_n - AB$ et $D = I_p - BA$.

1) *Montrer que si C est inversible alors D est inversible (résoudre $DX = 0$).*
2) *Le cas échéant, exprimer D^{-1} en fonction de A, B, C^{-1}.*
3) *En déduire que AB et BA ont les memes valeurs propres non-nulles. Examiner le cas de la valeur propre 0 si $n = p$.*