TD7 : suite du TD6

Exercice 1
Diagonaliser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (Valeurs propres multiples)
Diagonaliser ou trigonaliser (suivant possibilité) les matrices suivantes sur $\mathbb{R}$.

$$A_1 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Résoudre maintenant le système $A_1X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *par une méthode moins couteuse que la résolution globale.*

Mêmes questions avec $A_2X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $A_3X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Exercice 3
Soit A une matrice réelle

Montrer que si A est diago(resp. trigo)nalisable sur $\mathbb{R}$ alors elle est diago(resp. trigo)nalisable sur $\mathbb{C}$. Donner des contre-exemples des réciproques

Montrer que si A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, avec des valeurs propres réelles, alors elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4
Diagonaliser $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 5
*Soit A une matrice nilpotente (*i.e. *il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que A^n=0).*
Montrer que $Id - A$ est inversible. Quels sont ses valeurs propres ?
Montrer que A est trigonalisable.

Exercice 6
Soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$. Soit f l'endormorphisme de $\mathbb{k}^n$ défini sur les vecteurs de la base canonique ainsi :

$$f(e_i) = f(e_{\sigma(i)}).$$

Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 7
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{k})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{k})$. On note $C = I_n - AB$ et $D = I_p - BA$.

1) *Montrer que si C est inversible alors D est inversible (résoudre $DX = 0$).*
2) *Le cas échéant, exprimer D^{-1} en fonction de A, B, C^{-1}.*
3) *En déduire que AB et BA ont les memes valeurs propres non-nulles. Examiner le cas de la valeur propre 0 si $n = p$.*