

TD8 : Où viennent les polynômes annulateurs

Exercice 1

Pour les matrices suivantes, donner le polynôme caractéristique et le polynôme minimal.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer de plus A^2 puis A^3 en fonction de A pour les 2 premières matrices.

Exercice 2

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des nombres complexes non nécessairement distincts. On note $\mu_1, \dots, \mu_k$ ces memes nombres complexes, sans répétition. On note $m_i = \#\{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \mu_i = \lambda_j\}$. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de chacune des matrices suivantes :

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu_1 & a \\ 0 & \mu_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu_1 & a \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

$$A_i = \begin{pmatrix} \mu_i & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & \mu_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{C}) \quad \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_k \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer A^4 et A^{-1} grace à Cayley-Hamilton.

Meme question pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4

Dans les deux cas suivants, diagonaliser et calculer A^n :

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trigonaliser A . Calculer le polynôme minimal de A et donner une forme générale pour A^n grace à l'exercice 4 a)