TD9 : suite du TD8

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$*. Calculer* A^4 *et* A^{-1} *grace à Cayley-Hamilton.*

Meme question pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Dans les deux cas suivants, diagonaliser et calculer A^n *:*

$$a)A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère les suites récurrentes u, v *et* w *vérifiant ceci :*

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{cases}.$$

Calculer u_n, v_n *et* w_n *en fonction de* u_0, v_0 *et* w_0

Exercice 3

Trigonaliser cette matrice et calculer sa puissance n*-ième* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 4

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$*. On donne deux méthodes pour calculer* A^n*.*

1. *Calculer le polynome minimal de* A*. Montrer qu'on peut écrire* A^n *sous la forme* $u_nA + v_nId$*, puis calculer les coefficient* u_n *et* v_n *grace à l'exercice précédent*
2. *Trigonaliser* A

Exercice 5

Soit f *un endomorphisme d'un* $\mathbb{k}$*-espace vectoriel* E *vérifiant* $f^3 - f^2 + f - Id_E = 0$*.*

1. *Que dire des valeurs propres de* f *(si* $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*).*
2. f *est-il inversible, si oui, donner son inverse.*

Exercice 6

Dans $\mathbb{R}^4$ *on considère les sous-espaces vectoriels*

$$F = \{(x, y, z, t) | (x + y + z = 0) \text{ et } (x - y + t = 0)\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) | (2y + z - t = 0) \text{ et } (x - z - t) = 0\}$$

Sont-ils supplémentaires ?

Construire un endomorphisme f *de* $\mathbb{R}^4$ *tel que* $Kerf = F$ *et* $Im(f) = G$.

Exercice 7

On pose $\mathfrak{sl}_2$ *comme étant l'ensemble des matrices de trace nulle à coefficient dans* $\mathbb{C}$. *Montrer que les éléments de* $\mathfrak{sl}_2$ *sont soit nilpotents soit diagonalisables.*