Exercices pour le TD 1

Exercice 1
On considère les ensembles suivants :

- $\mathcal{U}$ *l'ensemble des suites* $(u_n)_{n\geq 0}$ *réelles (c'est à dire* $u_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$*),*
- $\mathcal{U}_0$ *l'ensemble des suites de* $\mathcal{U}$ *convergeant vers* 0*,*
- $\mathcal{U}_b$ *l'ensemble des suites bornées de* $\mathcal{U}$*,*
- $\mathcal{U}_c$ *l'ensemble des suites convergentes de* $\mathcal{U}$*.*

Montrer que

1. $\mathcal{U}$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel,*
2. $\mathcal{U}_0$ *est un sous-espace vectoriel du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathcal{U}$*,*
3. $\mathcal{U}_b$ *est un sous-espace vectoriel du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathcal{U}$*,*
4. $\mathcal{U}_c$ *est un sous-espace vectoriel du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathcal{U}$*.*

Exercice 2
Soit $\mathcal{F}$ *l'ensemble des fonctions définies de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

1. *Montrer que* $\mathcal{F}$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

Parmi les ensembles suivants, lesquels constituent des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$*-espace vectoriels* $\mathcal{F}$ *?*

1. $\mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(0) = 0\}$,
2. $\mathcal{F}_1 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(1) = 0\}$,
3. $\mathcal{F}_2 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(0) = 1\}$,
4. $\mathcal{F}_3 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 0\}$,
5. $\mathcal{F}_4 = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ est continue}\}$,
6. $\mathcal{F}_5 = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ est dérivable}\}$,
7. $\mathcal{F}_6 = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ est continue et croissante}\}$.

Exercice 3 *Soient* P_0, P_1, P_2 *et* P_3 *les polynômes définis par*

$$P_0(X) = (X-1)(X-2)(X-3), \qquad P_1(X) = X(X-2)(X-3),$$
$$P_2(X) = X(X-1)(X-3), \qquad P_3(X) = X(X-1)(X-2).$$

Montrer que ces polynômes forment une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.