TD10

Exercice 1
Aller au moins jusqu'à l'exercice 4 (inclus) de la feuille précédente.

Exercice 2

Soit $M = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & C \end{pmatrix}$

(i) Calculer M^n *en fonction de* A^n *et* C^n*. Puis,* $P(M)$ *en fonction de* A *et* C*.*

(ii) En déduire que le polynome minimal de A *divise le polynome minimal de* M*.*

(iii) Et enfin expliquer pourquoi la restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable est diagonalisable.

Exercice 3
Si A *n'est pas diagonalisable (respectivement nilpotente), montrer que* A *commute avec une matrice nilpotente (resp. diagonalisable).*

Exercice 4
Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & 2x(t) - y(t) - z(t) \\ y'(t) & = & -x(t) + 2y(t) - z(t) \\ z'(t) & = & -x(t) - y(t) + 2z(t) \end{array} \right.$$

$$S_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & -3x(t) + 2y(t) + z(t) \\ y'(t) & = & z(t) - 3y(t) \\ z'(t) & = & -3z(t) \end{array} \right.$$

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & -y(t) \\ y'(t) & = & x(t) \end{array} \right.$$

Exercice 5

Réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *sous forme normale de Jordan et en déduire* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Calculer* $exp(A)$*.*

Exercice 6

Meme exercice pour $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.