TD1: Espaces Vectoriels

Exercice 1
Dans chacun des exemples suivants, E est-il un $\mathbb{k}$-espace vectoriel ? Justifier.
- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$)
- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 6\}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$)
- *E est l'ensemble des matrices symétriques de taille* 2×2

Exercice 2
On considère les ensembles suivants :
- *$\mathcal{U}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ réelles (c'est à dire $u_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$),*
- *$\mathcal{U}_0$ l'ensemble des suites de $\mathcal{U}$ convergeant vers* 0*,*
- *$\mathcal{U}_b$ l'ensemble des suites bornées de $\mathcal{U}$,*
- *$\mathcal{U}_c$ l'ensemble des suites convergentes de $\mathcal{U}$.*

Montrer que
1. *$\mathcal{U}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel,*
2. *$\mathcal{U}_0$, U_b, U_2 sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{U}$,*

Exercice 3
Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
1. *Montrer que $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

Parmi les ensembles suivants, lesquels constituent des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriels $\mathcal{F}$?
1. $\mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(0) = 0\}$,
2. $\mathcal{F}_1 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(1) = 0\}$,
3. $\mathcal{F}_2 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(0) = 1\}$,
4. $\mathcal{F}_3 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 0\}$,
5. $\mathcal{F}_4 = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ est continue}\}$,
6. $\mathcal{F}_5 = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ est dérivable}\}$,
7. $\mathcal{F}_6 = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ est continue et croissante}\}$.

Exercice 4
Les familles suivantes sont-elles libres ? Justifier

1) $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

2) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

Donner deux bases de $\mathbb{R}^2$ utilisant les vecteurs précédents

Exercice 5
Soient P_0, P_1, P_2 et P_3 les polynômes définis par

$$P_0(X) = (X-1)(X-2)(X-3), \qquad P_1(X) = X(X-2)(X-3),$$
$$P_2(X) = X(X-1)(X-3), \qquad P_3(X) = X(X-1)(X-2).$$

Montrer que ces polynômes forment une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.
Montrer qu'ils forment une base des polynomes de degré $\leqslant 3$

Exercice 6
Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$. Trouver une base de E et la completer en une base de $\mathbb{R}^3$