

## TD2

### Exercice 1

Savez-vous ce qu'est un espace vectoriel, une base d'un espace vectoriel, une application linéaire et la matrice d'une application linéaire dans une base ?

Si la réponse est non, passez 10 minutes MAXIMUM à relire votre cours et à me poser des questions.

Devoir maison : Savoir ce qu'est un espace vectoriel, une base d'un espace vectoriel, une application linéaire et la matrice d'une application linéaire dans une base !

### Exercice 2

Soit  $\mathbb{k}$  un corps quelconque (par exemple  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ),  $E = \mathbb{k}^2$  et  $F = \mathbb{k}^3$ .

1. Donner une famille libre de  $E$  non génératrice et une famille génératrice non libre de  $E$ .
2. Est-ce que l'application déterminant :  $\det : E \rightarrow \mathbb{k}$  est une application linéaire ?
3. Soit  $f : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, 2x - y) \end{array}$ 
  - i) Ecrire la matrice de l'application  $f$  dans la base canonique.
  - ii) Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .
4. Mêmes questions avec  $F$  à la place de  $E$  et  $f : \begin{array}{ccc} F & \rightarrow & F \\ (x, y, z) & \mapsto & (3x + 2y, 3y + 2z, -4z + 9x) \end{array}$
5. Ecrire la matrice de cette dernière application dans la base  $((0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$  (après avoir vérifié que cette dernière famille est une base de  $F$ ).

### Exercice 3

On considère l'espace vectoriel  $E$  des polynômes de degré inférieur à 2 et l'application  $D : E \rightarrow E$  de dérivation.

- i) Ecrire la matrice de l'application  $D$  dans la base canonique  $B$ .
- ii) Déterminer le noyau et l'image de  $D$ .
- iii) Ecrire la matrice de  $D$  dans la base  $B' = ((X - 1)^n)_{n=0,1,2}$ .
- iv) Ecrire la matrice de passage de  $B$  à  $B'$ .

### Exercice 4

Dans chacun des cas ci-dessous,  $E$  et  $F$  seront deux espaces vectoriels donnés de dimension finie. On se donnera aussi une application  $f : E \rightarrow F$ . On demande de vérifier que l'application est une application linéaire et d'écrire la matrice de l'application  $f$  dans des bases de votre choix.

- $E = F = M_2(\mathbb{k})$ . On pose  $f$  comme étant l'application de transposition :  $A \mapsto A^t$ .

–  $E = M_2(\mathbb{K})$ ,  $F = M_{2,3}(\mathbb{K})$ . On pose  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ . On définit  $f$  par  $f.B = B.A$  pour  $B \in E$ .

**Exercice 5**

Soit  $E = \mathbb{R}^2$ . Soit  $D \subset E$  la droite d'équation  $x - 2y = 0$ . On définit  $S : E \rightarrow E$  comme étant la symétrie orthogonale par rapport à  $D$ .

Ecrire la matrice de  $S$  dans la base canonique et dans une base de votre choix (Essayez de vous faire en sorte que la matrice soit plus simple).

Ecrire la matrice de passage d'une base à l'autre. Déterminer le noyau de  $S - Id$  et le noyau de  $S + Id$ . Interprétation géométrique ?